



Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Temel Geometrik Oluşumları Gerçekleştirmelerine Yönelik Tasarlanan Bir Öğrenme Yörüngesinde Bilişsel Süreçlerinin İncelenmesi

Ömer Deniz ¹, Tangül Kabael ²

Öz

Bu çalışmada altıncı sınıf öğrencilerin temel geometrik oluşumları gerçekleştirme sürecinde kavramsal alt yapının ve dinamik düşünme yollarının desteklendiği bir öğrenme yörüngesi tasarlanması ve bu süreçte öğrencilerin bilişsel gelişimlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Tasarım tabanlı bir araştırma olan bu nitel çalışmada veriler bireysel ve grup çalışma kâğıtları, derslerin video kayıtları, saha notları, ödev kâğıtları ve odak katılımcılarla gerçekleştirilen klinik görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Odak katılımcılar araştırma öncesinde temel geometrik oluşumların gerçekleştirilmesinde önkoşul bilgileri olarak görülen nokta, doğru, doğru parçası ve ışın kavramlarına yönelik geliştirilen bir açık uçlu test aracılığında amaçlı örnekleme yoluyla belirlenmiştir. Çalışma hazırlık ve tasarım aşaması, öğretim deneyi ve geriye dönük analiz olmak üzere üç temel aşamada gerçekleştirilmiştir. Hazırlık ve tasarım aşamasında epistemolojik ve didaktik yönden kapsamlı analize olanak tanıyacak şekilde gerçekleştirilen alanyazın taraması ile başlangıç olası öğrenme yörüngesi tasarlanmıştır. Öğrenme yörüngesinin uygulanması ve değerlendirilmesi amacıyla gerçekleştirilen öğretim deneyi boyunca mikro analizler yapılarak biçimlendirici değerlendirmelerde bulunulmuş ve son olarak öğretim deneyi sonunda öğrencilerin düşünme süreçleri ve eylemleri üzerine başlangıçta varsayılan öğrenme yörüngesi ile gerçekte olan arasında karşılaştırmalı analiz yapılmıştır. Sonuç olarak revize edilmiş öğrenme yörüngesi ve öğrencilerin gelişimsel ilerleyişleri yorumlayıcı bir çerçevede sunulmuştur. En genel anlamda bir oluşumun farklı yön ve doğrultularda gerçekleştirilebilmesi, inşa sürecinde geometrik yapıların değişen ve değişmeyen yönlerinin dikkate alınması, pergel açıklığının değişkenliğinin yorumlanabilmesi, olası noktaların gerektiğinde tümünün çember olarak ya da gerektiğinde bir kısmının yay olarak açığa çıkarılabilmesi, adımların gerçekleştirilme güzergâhında değişiklik yapılabilmesi ve gerektiğinde bu değişikliklerin yorumlanıp savunulabilmesi gibi bilişsel eylemlerin

Anahtar Kelimeler

Geometrik Oluşum
Geometrik Düşünme
Varsayımsal Öğrenme Yörüngesi
Pergel
Çizgeç

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 27.12.2019
Kabul Tarihi: 30.11.2020
Elektronik Yayın Tarihi: 30.12.2020

DOI: 10.15390/EB.2020.9328

¹ Tuna İmam Hatip Ortaokulu, Türkiye, omerdenizmat@gmail.com

² Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, tuygur@anadolu.edu.tr

desteklenmesinin dinamik geometrik oluşumlar inşa edilmesinde önemli olduğu görülmüştür. Algoritmik adımları takip ederek oluşumları sadece işlemsel olarak ortaya koyup matematiksel gerekçelendirmelerle savunma yapamayan öğrencilerin daha çok durağan düşünme süreçleri ortaya koyabildikleri dikkat çekmiştir. Sadece analiz ve oluşum aşamaları ile sınırlı öğrenme ortamlarının, kavramsal alt yapısı güçlendirilmiş oluşumlar gerçekleştirilmede yetersiz kalabileceği görülmüş ve bu sebeple dinamikleşen düşünme süreçlerinin desteklenmesine olanak sunan kanıt ve tartışma aşamalarına fırsat veren öğrenme ortamları tasarlanmasının önemi ortaya konmuştur. Ayrıca bir temel geometrik oluşumun gerçekleştirilmesinde o oluşumda esas olan geometrik yapıların karakteristik özelliklerinin dikkate alınmasına ve diğer yapılarla ya da oluşumlarla ilişkilendirmeler yapılmasına fırsat veren bir öğrenme yürüncesinin kavramsal alt yapısı güçlendirilmiş oluşumlar gerçekleştirilebilmesine önemli katkılar sağladığı sonucuna ulaşılmıştır.

Giriş

Geometri becerisi, ölçme ve problem çözme becerileriyle ilişkili olarak şekilleri anlamlandırma, onların özellikleri ve parçaları arasında ilişki kurma gerektiren temel bir matematik becerisidir (Sherard, 1981). Bu becerinin desteklenmesi geometrik düşünme ile doğrudan ilişkilidir (Muhassanah, 2014, aktaran Nur ve Nurvitasari, 2017). Geometrik düşünme, şekilleri algısal olarak tanıma, ardından şekillerin karakteristik özelliklerini fark etme ve bu özellikler temelinde şekiller arası ilişkiler kurma, dahası şekil özellikleri üzerine muhakeme ederek şekil aileleri arasında ve de farklı aksiyomatik sistemler arasında örüntüler kurma ya da var olan örüntüyü ortaya çıkarma doğrultusunda sürekli gelişim göstermektedir. Öğrenen bireyin geometrik şekiller, özellikler, sistemler arası ilişkilendirme yapmasına ve problem durumlarında yansıtma yaparak daha üst düzey geometrik düşünme gerektiren süreçlere doğru yelken açmasına olanak tanıyan ortamlar yaratılması onların yığınsal gelişim gösteren geometrik düşünme süreçlerinin desteklenmesinde önemlidir. Sadece görsel olarak şekiller ortaya koymanın ötesine geçerek geometrik yapıların analiz edilmesini, bu yapılar arası ilişkiler kurulmasını gerektiren geometrik oluşum problemleri, bireyde var olan geometrik yapıların önemli ve kritik özelliklerinin farklı problem durumlarında uygulanmasına izin vermekte ve düşüncenin gelişimine katkı sağlayan büyük bir itici güç ortaya çıkarmaktadır (Stupel ve Ben-Chaim, 2013). Geometrik oluşumlar birçok geometrik ilişkinin zihinlerde berraklaşmasına ve güçlenmesine katkı sağlamaktadır (Sanders, 1998). Belirli geometrik araçlar yardımıyla geometrik yapıların inşa edilmesi anlamına gelen geometrik oluşum süreci, bireyin ortaya koyduğu yapılarla ilgili gözlemlendiği ya da ulaştığı sonuçlar üzerine, gerçekleştirdiği eylemlerini açıklama, kanıtlama ve içeriğini genişletme gibi muhakemeler yapmasını gerektirmektedir (Köse, Tanışlı, Erdoğan ve Ada, 2012). Bu süreçte esas olan bir şekli rastgele de olsa çizilemek değil, sadece pergel ve çizgeç yardımıyla onun nasıl çizilebileceğine yönelik kesin algoritmik adımlar üretmektir (Smart, 1998). Ayrıca bu süreçte yalnızca bir geometrik yapının inşası değil, aynı zamanda bu inşanın nasıl gerçekleştirildiği de matematikçiler tarafından problem durumu olarak kabul edilmektedir (Erduran ve Yeşildere, 2010). Dolayısıyla bir geometrik oluşum sürecinde kesin çözüme ulaştıran adımların ezberlenerek kural şeklinde ortaya konmasından ziyade açıklama, gerekçelendirme, kanıtlama gibi atılan adımların anlamlandırılmasına olanak tanıyan eylemlerin gerçekleştirilmesi ve gerektiğinde adımlar arasında dinamik geçişler yapılarak önceki adımların ve oluşumların farklı yeni oluşum problemlerinde yansıtılabilmesi geometrik düşünmenin desteklenmesine önemli katkı sağlamaktadır. Eğer öğrencilerden bir oluşum sırasında attıkları adımların açıklamalarını ve kanıtlarını kendilerinin yapmaları bekleniyorsa, onlara sağlanacak öğrenme ortamlarının çok dikkatli bir şekilde tasarlanması gerekmektedir (Kondratieva, 2013). Özellikle lise ve üzeri düzeyde gerçekleştirilmesi beklenen karmaşık ve daha üst düzey geometrik oluşumlar için Öklid'in temel oluşumlarının içselleştirilmesi esastır (Kondratieva, 2011; Napitupulu,

2001). Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından 2018 yılında yayınlanan ilkökul ve ortaokul matematik dersi öğretim programına göre öğrenciler temel geometrik oluşumlar ile ilk kez ortaokul yıllarında karşılaşmaktadır. Bu sebeple ortaokul yıllardan itibaren temel oluşumların gerçekleştirilmesi sürecine yönelik çalışmalar önem kazanmaktadır. Bu çalışmada altıncı sınıf düzeyinde temel geometrik oluşumların gerçekleştirilmesini esas alan bir öğrenme ortamında öğrencilerin gelişimsel ilerleyişine ışık tutan olası bilişsel eylemlerini içeren öğrenme yörüngeleri tasarlanması amaçlanmıştır.

Geometrik Oluşum ve İlişkili Alanyazın

Geometrik oluşumların, düzlem geometrinin temelini oluşturan MÖ 300 yılları civarında yazılmış Öklid'in "Elementler" kitabında geometrinin merkezine konumlandırıldığı görülmektedir (Martin, 2012). Kesin ve katı kuralların olduğu Antik Yunan'da sadece çizgeç ve pergel kullanılarak geometrik oluşumlar gerçekleştirilmesine izin verildiği ve yalnızca bu iki araç yardımıyla yapılan oluşumların kabul edildiği görülmektedir (Albrecht, 1952; Hogben, 2004). Smart (1998) geometrik oluşumları, bir dizi temel ve karmaşık adım içeren birtakım kurallar yardımıyla problem çözme stratejisi olarak tanımlamaktadır. Smart'a göre (1998) geometrik oluşumlarda amaç yalnızca bir çizim gerçekleştirmekten öte, pergel ve çizgeç kullanarak geometrik bir yapıyı karakteristik özellikleri veya diğer yapılarla ilişkileri temelinde inşa edebilmektir. Alanyazında geometrik oluşum etkinliklerinin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine olumlu katkı sağladığı vurgulanmaktadır (ör. Cheung, 2011; Güven, 2006; Napitupulu, 2001; Uygun, 2016). Pergel ve çizgeç aracılığında yapılan geometrik oluşumlar psiko-motor becerileri geliştirmenin ötesinde geometrik anlamayı, geometrik şekillerin oluşumundaki mutlak özellikler hakkında bilgi sahibi olmayı destekleyerek bilişsel becerilerin gelişimine doğrudan katkı sağlamaktadır (Cheung, 2011; Napitupulu, 2001). Geometrik oluşumların sadece işlemsel olarak gerçekleştirilmesinden ziyade atılan adımların matematiksel gerekçelendirmelerinin yapılabildiği kavramsal alt yapısı güçlendirilmiş bir süreç ortaya konarak gerçekleştirilmesi, geometrik oluşumların bireye sağlayacağı katkının üst seviyelere çıkarılmasını desteklemesi yönünden gereklidir. Diğer yandan öğrenciler genel olarak geometrik bilgilerini problem durumlarına uygulamada güçlük yaşarlar (Kondratieva, 2011). Köse ve diğerleri (2012) geometrik kavramların, şekillerin, özelliklerin ve kanıtların anlamlandırma olmaksızın ezberletildiği ve bunun da geometri öğrenmede zorlanmaya neden olduğunu vurgulamakta ve geometrik oluşum etkinliklerinin bu olumsuzluğun üstesinden gelmede önemli bir fırsat sağlayabileceğine dikkat çekmektedir.

Karmaşık geometrik oluşum problemlerinin çözülebilmesi ve kanıtlanabilmesinde Öklid'in temel geometrik oluşumları kritik bir öneme sahip olup temel basamak taşları olarak görülmektedir (Kondratieva, 2011; Napitupulu, 2001). Smart'a (1998, s. 166) göre bu temel oluşumlar, (i) eş doğru parçası inşa etme, (ii) doğru parçasının orta noktasını bulma, (iii) doğruya kendi üzerindeki bir noktadan geçen dikme inşa etme, (iv) doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa etme, (v) üç kenarı verilen bir üçgeni inşa etme, (vi) açıortay inşa etme, (vii) eş açı inşa etme, (viii) iki kenarı ve bir açısı verilen üçgeni inşa etme, (ix) bir noktadan, verilen bir doğruya paralel bir doğru inşa etme şeklinde sıralanabilmektedir. Alanyazın incelendiğinde bu temel geometrik oluşumların pergel ve çizgeç ile gerçekleştirilmesine odaklanan çalışmaların bir kısmının matematik öğretmenleri veya öğretmen adayları ile diğer kısmının ise lise ve ortaokul öğrencileri ile gerçekleştirildiği görülmektedir. Üç matematik öğretmenini öğretim ortamlarında gözlemleyen Erduran ve Yeşildere (2010) sonuç olarak geometrik oluşumlardan haberdar olmadıklarını, onları sadece görselleştirmeye yarayan etkinlikler olarak düşündüklerini veya öğretim sırasında hiç bu oluşumları gerçekleştirme gereği duymadıklarını ortaya koymuşlardır. Dört matematik öğretmenin katılımı olduğu bir diğer çalışmada ise sınıf uygulamalarında geometrik oluşumların ancak temel düzeyde ele alınabildiği görülmüştür (Öçal ve Şimşek, 2017). Ayrıca Öçal ve Şimşek (2017) öğretmenler tarafından çizgeç yerine cetvel kullanma, sıralı adımları takip ederken bazı adımları atlama gibi istenmeyen ve oluşumun gerçekleştirilmesiyle sağlanması öngörülen katkıların azalmasına sebep olabilecek eylemler ortaya konulabileceğini göstermiştir. Tapan ve Arslan (2009), öğretmen adaylarının geometrik oluşumları gerçekleştirme sürecinde matematiksel özellikler ve görsel elemanları nasıl kullandıklarını belirlemeyi amaçlamıştır. Sonuçta öğretmen adaylarının büyük bir kısmının geometrik oluşumlar gerçekleştirirken görsel elemanları kullandığı ve deneysel gerekçelendirmeler yaptıkları görülmüştür (Tapan ve Arslan, 2009). Karakuş (2014) üniversitede geometri dersinde geometrik oluşum etkinlikleri gerçekleştirmiş 63

ilköğretim matematik öğretmeni adayının geometrik oluşum etkinliklerine yönelik görüşlerini incelemiştir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının bu etkinliklerin geometri konularını anlamaya yardımcı olabileceğini düşündüklerini ortaya koymuştur (Karakuş, 2014). Karakuş (2014) çalışmasında öğretmen adaylarının geometrik oluşumları pergel ve çizgeç yardımıyla gerçekleştirirken hangi adımları hangi sıra ile atacaklarına karar vermekte zorlandıklarını göstermiştir. Uygun (2016) matematik öğretmeni adaylarının üçgen kavramına yönelik konu alan bilgisini geliştirmek amacıyla pergel ve çizgeç yardımıyla geometrik oluşumlar gerçekleştirmeyi içeren bir varsayımsal öğrenme yörüngesi tasarlamıştır. Sonuç olarak Uygun (2016) argümantasyon destekli öğrenme ortamında uygulanan öğrenme yörüngesinin, öğretmen adaylarının konu alan bilgilerini geliştirdiği ve geometrik düşünme düzeylerinde sıçrama yapmalarına katkı sağladığı sonucuna ulaşmıştır. Gür ve Demir (2017) 72 lise matematik öğretmeni adayı ile gerçekleştirdiği çalışmada, pergel ve cetvel kullanılarak geometrik oluşumlar gerçekleştirmenin onların geometrik düşünme düzeylerinin artışına olanak verdiği sonucuna ulaşmış ve ayrıca bu süreçte matematiğe olan tutumlarının olumlu yönde değişim gösterdiğini ortaya koymuştur. Stupel ve Ben-Chaim (2013) ise lise matematik öğretmen adayları ile sadece çizgeç kullanarak bir yamuk teoreminin uygulanmasını gerektiren oluşumlar üzerinde çalışmıştır. Başvurulan yamuk teoreminin sadece çizgeç kullanılarak dikme inşa etmede bir araç olarak kullanılabileceğini ortaya konmuştur (Stupel ve Ben-Chaim, 2013). Kuzle (2013), iki farklı kültürden gelen aday öğretmenler ile iki ayrı grup olarak pergel ve çizgeç, açıölçer, Dinamik Geometri Yazılımları (DGY) gibi farklı araçlarla geometrik oluşumları gerçekleştirmelerine yönelik öğretim deneyleri yürütmüştür. Kuzle (2013) bu çalışmada öğretmen adaylarının hem bir öğrenen olarak anlama sürecindeki değişimi incelemiş hem de bir öğretmen olarak bu yönde gelecekte ortaya koyacakları öğretimden geometrik düşünme çerçevesinde öğrencilere sağlayacağı yararlar hakkındaki düşüncelerini incelemiştir. Sonuç olarak tüm katılımcı öğretmen adayları geometrik oluşumların gerçekleştirilmesinde pergel ve çizgeç kullanımına başvurmuş ve bu araçların matematiksel akıl yürütmeye sağladığı ve sağlayacağı katkının yanı sıra geometrik ilişkiler arasında bağlar kurmadaki rolüne de dikkat çekerek önemini savunmuştur (Kuzle, 2013). Kuzle'nin (2013) çalışmasından elde edilen önemli sonuçlardan bir diğeri katılımcıların DGY'leri görselleştirmeyi sağlama, kesinlik belirtme ve hızlı olma yönünden geometrik oluşumlarda kullanışlı bulmaları ve ayrıca doğrulama sürecindeki kritik rolüne dayanarak öğrenme ortamlarında yer verilmesi gerektiğini düşünmeleri olmuştur.

Alanyazın incelendiğinde DGY'lerin ortaya çıkışıyla birlikte geometrik oluşumların farklı bir boyut kazandığı ve DGY ortamında geometrik oluşum etkinliklerinin esas alındığı çalışmalar üzerine yoğunlaşıldığı görülmektedir (ör. Çiftçi ve Tatar, 2014; Kondratieva, 2013; Köse vd., 2012; Laborde, 2005; Lukáč, 2010; Pratt ve Ainley, 1997; Stylianides ve Stylianides, 2005; Ulusoy, 2019; Yıldız, 2016). DGY kullanımı ile birlikte pergel ve çizgeç kullanımını inceleyen çalışmalar da bulunmaktadır. Bu çalışmalardan Çiftçi ve Tatar (2014) geometrik oluşum etkinliklerinin gerçekleştirilmesinde öğretmen adaylarının başarısına dinamik geometri yazılımları ve pergel-çizgeç kullanımının etkisini inceleyerek karşılaştırma yapmıştır. Sonuç olarak ikisinin de başarıyı olumlu etkilediği görülmüş ve ikisi arasında başarıyı etkileme yönünden anlamlı bir fark olmadığı sonucuna ulaşılmıştır (Çiftçi ve Tatar, 2014). Köse ve diğerleri (2012) matematik öğretmen adayları Cabri Geometri II yazılımını içeren TI-Nspire CAS hesap makineleriyle desteklenmiş bir öğretim sürecinin, onların istenilen geometrik oluşumları sadece kâğıt kalem ortamında, cetvel, iletke, pergel ve gönyeden oluşan bir geometri çizim seti ile gerçekleştirmelerine etkisini incelemişlerdir. Ön testte gerçekleştirilmesi istenen oluşumun tek bir özelliğine bağlı kalarak geçersiz oluşumlar ortaya koydukları görülen katılımcıların teknoloji destekli öğretimin ardından uygulanan son testte tümevarımsal bir muhakeme yoluyla teorik oluşumlar ya da birden fazla geometrik özellik dikkate alarak oluşumlar gerçekleştirilebildikleri görülmüştür (Köse vd., 2012). Ulusoy'un (2019) ortaokul matematik öğretmeni adaylarının paralel doğru inşa etme süreçlerine odaklanan çalışmasında kâğıt-kalem ortamında pergel ve çizgeç kullanılarak gerçekleştirilen oluşumlara dair ortaya çıkan farklı performanslar dinamik geometri yazılımı (GeoGebra) ile desteklenmiş öğrenme ortamında doğrulaması yapılarak tartışılmıştır. Sonuç olarak öğretmen adayları, DGY destekli öğrenme ortamlarının, alternatif oluşumlar gerçekleştirmede ve gerçekleştirilen oluşumun doğrulamasını yapmada sağladığı katkıyı görmüşlerdir (Ulusoy, 2019). Bununla birlikte Ulusoy'a göre (2019) oluşumu savunabilmek için sağlam dayanaklar sunmaları gerektiğinin farkına varmışlardır. Ayrıca alanyazında geometrik oluşumların gerçekleştirilmesinde veya kanıtlanmasında

başvurulabilecek bir takım yazılım programlarının tasarlandığı çalışmalar da bulunmaktadır (ör. Djoric ve Janicic, 2004; Gulwani, Korhikanti ve Tiwari, 2011; Janičić, 2006; Kellison, Bickford ve Constable, 2019).

Alanyazında pergel ve çizgeç kullanılarak gerçekleştirilen geometrik oluşum etkinliklerine yönelik ortaokul ve lise öğrencileri ile yürütülmüş birkaç çalışmaya rastlanmıştır. Ortalama 15 yaşında olan 18 lise öğrencisi ile gerçekleştirilen çalışmada Cheung (2011) pergel ve çizgeç yardımıyla gerçekleştirilen geometrik oluşum etkinliklerinin öğrencilerin kritik düşünme yollarını desteklediği, doğrulama ve kanıtlama becerilerini geliştirmelerine doğrudan katkı sağladığı sonucuna ulaşmıştır. Tosun (2019) dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçlerini incelediği çalışmasında açıortayı çizimleri sırasında öğrencilerin en çok pergel ve çizgeç aracılığında oluşumu gerçekleştirmekte zorlandıklarını ortaya koymuştur. Ulusoy (2014) 498 ortaokul öğrencisine, diklik ve paralellik hakkında kavram imajlarına ve kavram yanlışlarına yönelik bir test uygulamıştır. Sonuç olarak ortaokul öğrencilerinin zihinlerinde diklik için oluşturdukları imajların, prototip şekillerle ilişkili olarak sahip olunan görsel imajların etkisinde kaldığı görülmüştür (Ulusoy, 2014). Ulusoy (2016) altıncı ve yedinci sınıfta okuyan 83 öğrencinin katılımcı olduğu bir diğer çalışmada da öğrencilerin diklik ve paralellik hakkında karar verirken görsel imajlarının etkisi ile sınırlı örnek uzaylarının onların tam ve doğru cevaplar verememesine sebep olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ulusoy'un (2014, 2016) çalışmalarında ortaokul öğrencilerinin diklik kavramına yönelik imajlarının iki dik doğrunun birbirini ortalaması gerektiği, doğruların uzunluklarının sınırlı olduğu yanlışlığı ile dik doğruların eşit uzunlukta olması gerektiği, sadece yatay ve dikey doğru çiftinin diklik oluşturabileceği düşüncelerini içerdiği görülmüştür. Diklik ve paralellik kavramlarına odaklanan bir diğer çalışmada, Paksu ve Bayram (2019) altıncı sınıf öğrencilerinin diklik ve paralellik belirleyebilme ve inşa edebilme süreçlerine yönelik bir özel durum çalışması gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin dikliği ve paralellik inşa ederken yatay ve dikey doğrular için daha başarılı olduğu görülmüştür (Paksu ve Bayram, 2019). Ayrıca Paksu ve Bayram (2019) öğrencilerin diklik ve paralellik karar verirken doğru çiftlerinin görünümünün onlar için belirleyici olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ortaokul öğrencilerinin katılımcı olduğu bir diğer çalışmada ise Chikwere ve Ayama (2016) 60 ortaokul öğrencisi ile deneysel bir çalışma gerçekleştirmiştir. Geometrik oluşumların gerçekleştirilmesine yönelik öntestte öğrencilerin geometrik oluşumlara dair çok az bilgisi olduğu görülmüş ve %87' sinin başarısız olduğu ortaya konmuştur (Chikwere ve Ayama, 2016). Ardından iki gruba ayrılan katılımcılardan bir gruba soyut yöntem (abstract method) diğerine ise uygulamalı yöntem (practical method) dayalı öğretimler gerçekleştirmiş ve sonuç olarak uygulamalı yöntemin esas alındığı öğretim sürecine katılan öğrencilerin geometrik oluşumlara yönelik bilgi ve anlayışlarının daha çok geliştiği sonucuna ulaşmıştır (Chikwere ve Ayama, 2016). Geometrik oluşumlar gerçekleştirilirken atılan adımların ne anlama geldiğinin sorgulanmasına ve oluşumlar arasında ilişkilendirmeler yapılmasına fırsat verilmesinin üst düzey düşünme becerilerinin geliştireceğini öne süren Lim (1997) bu doğrultuda örnek bir etkinlik şeması sunmuştur. Bu etkinlik şeması ikizkenar üçgenin özelliklerini saptama, deltoid ve eşkenar dörtgenlerin özelliklerini saptama, bir eşkenar dörtgen ya da ikizkenar üçgenin özelliklerini kullanarak açıortay ve kenar orta dikme inşa etme güzergâhında gerçekleştirilen bir öğretim sürecini işaret etmektedir. Lim (1997) bu şemanın, öğrencilerin anlamlı oluşumlar gerçekleştirmelerine olanak tanıyabileceğini ve bu sayede ilişkisel anlamayı destekleyerek daha üst düzey düşünme becerilerine katkı sağlayabileceğini öne sürmüştür.

Alanyazında görülmektedir ki geometrik oluşum etkinlikleri ilişkisel düşünmeyi destekleme, daha üst düzey geometrik düşünmeye geçiş hızlandırma, doğrulama-kanıtlama gibi matematiksel düşünme becerilerinin ortaya konmasına fırsat tanıma gibi birçok farklı yönden bireye katkı sağlamaktadır. Bu katkının üst düzeylere çıkarılabilmesi için geometrik oluşumların sadece işlemsel olarak gerçekleştirilmesinin yeterli olmadığı vurgulanmakta iken atılan adımların ne anlama geldiğinin farkında olunmasına, hangi geometrik yapıların hangi özelliklerinin kullanıldığı ve hangileri arasında nasıl ilişkilendirmeler yapıldığı gibi sorgulayıcı süreçler gerektiren öğrenme ortamlarının gerekliliğine dikkat çekilmektedir. Öğrencilerin geometrik oluşumların niçin yapıldığına anlam veremediğini ileri süren Lim (1997) okullarda geometrik oluşumların bir dizi karmaşık adımdan oluşan işlemsel bir süreç olarak öğretildiğini ve bu süreçte atılan adımların neden ve nasıl işlediğine dair herhangi bir

gerekçelendirme yapılmadığını vurgulamaktadır. Alanyazında ortaokul ve lise öğrencileri ile gerçekleştirilen çalışmalarda da onların geometrik oluşumları gerçekleştirmekte zorlandıkları ve bu süreçte ortaya koydukları eylemleri savunamadıkları görülmektedir. Dahası alanyazında öğretmen ve öğretmen adaylarının da geometrik oluşumları gerçekleştirmekte zorlandıkları, daha çok oluşumların işlemsel yönüne vurgu yaparak sadece görselleştirmeye olanak tanıma, araç kullanmaya teşvik etme gibi katkılarının farkında oldukları dikkat çekmektedir. Her ne kadar temel geometrik oluşumların gerçekleştirilmesinin beklendiği ortaokul yıllarında kanıt gibi formal düşünme süreçlerinin ortaya konması beklenmese de öğretim sürecinde gerekçelendirmeler yapılmasına olanak tanınmalı ve öğrenciler için anlamlı olacak dayanaklar sağlamalıdır (Kunimune, Fujita ve Jones, 2010; Lim, 1997). Bu sayede bireyin zihninde geometrik yapının, sadece görsel olarak yer edinmesinin ötesine geçilerek, diğer yapılarla ilişkilendirilip farklı düşünme süreçlerinden geçirilmiş olarak yeni bir problem durumuna yansıtılmaya hazır halde bulunması konusunda önemli bir katkı sağlanmış olacaktır. Geometrik oluşumlar pek çok zaman önceden yapılandırılan birçok geometrik oluşumun yansıtılmasını gerektirmektedir (Kondratieva, 2011; Lim, 1997). Bu açıdan bakıldığında birçok oluşumda sıklıkla yansıtılan temel geometrik oluşumların erken yıllardan itibaren sadece işlemsel olarak değil aynı zamanda kavramsal alt yapısı güçlü bir şekilde yapılandırılması ilerleyen yıllarda geometrik oluşumlara dair devam etmesi beklenen gelişimsel ilerleyiş için önemlidir. Eğitimde teknolojinin ve dolayısıyla DGY kullanımının artması ile birlikte öğretmen ve öğrencilere geometrik ilişkileri dinamik olarak keşfetmeleri ve daha karmaşık geometrik oluşumlar yaratabilmeleri için önemli fırsatlar doğmuştur (Stupel ve Ben-Chaim, 2013). Ancak DGY'lerin birçoğunda dik çizme, orta nokta bulma, paralel inşa etme, eş açı veya eş doğru parçası oluşturma gibi temel oluşumları doğrudan sağlayan butonlar görülmektedir. Bireyin bu temel oluşumları küçük yaşlardan itibaren sadece bu butonlar ile sağladığı düşünülürse, fiziksel ortamda temel oluşumları gerçekleştirmekte ve sanal ortamda gerçekleştirdiği bu oluşumları nedenleriyle savunmakta sıkıntı yaşayacağı açıktır. Dolayısıyla öğrenme ortamlarında ihmal edilen ya da sadece işlemsel olarak gerçekleştirilmesine olanak tanınan geometrik oluşumlara ilişkin kavramsal alt yapının desteklendiği öğretim tasarımına gereksinim duyulmaktadır. Bu çalışma, temel geometrik oluşumların öğretimine ilişkin bir öğrenme yürüngenisi tasarımı ortaya koyması açısından özgün değer taşımaktadır. Ayrıca alanyazında ortaokul düzeyindeki öğrencilerin geometrik oluşumları gerçekleştirmesi sırasında bilişsel süreçlerinin açığa çıkarılmasına yönelik daha çok çalışmanın yapılması gerektiği görülmektedir. Altıncı sınıflarda temel geometrik oluşumlara yönelik bir öğretim tasarımının ortaya konması amaçlanan bu çalışmada tasarlanan öğrenme yürüngenelerinde öğrencilerin bilişsel gelişimleri incelenecek olup bu sayede alanyazındaki önemli bir boşluğun doldurulmasına da katkı sağlanacaktır.

Araştırmada tasarlanan öğretimin geometrik oluşumlar ile ilişkili kavramsal alt yapıyı desteklemesi ve bu öğrenme ortamında altıncı sınıf öğrencilerinin Öklid'in temel geometrik oluşumlarını gerçekleştirme süreçlerinin incelenmesi amaçlandığından, geometrik oluşumlardaki araçlar yalnızca pergel ve çizgeç olarak seçilmiştir. Araştırmada öğrenme amaçları olarak ele alınan beş geometrik oluşum ise Tablo 1'de görüldüğü gibidir. Bu öğrenme amaçları doğrultusunda aşağıdaki soruya yanıt aranacaktır:

Temel geometrik oluşumların gerçekleştirilmesini destekleyecek şekilde tasarlanan bir öğrenme yürüngeninin rehberlik ettiği öğrenme ortamında altıncı sınıf öğrencilerinin bilişsel gelişimleri nasıl olmaktadır?

Tablo 1. Çalışmada Hedef Alınan Öğrenme Amaçları

Öğrenme Amacı 1	Pergel ve çizgeç yardımıyla eş doğru parçası inşa eder.
Öğrenme Amacı 2	Üç kenarı verilen bir üçgeni pergel ve çizgeç yardımıyla inşa eder.
Öğrenme Amacı 3	Bir doğru parçasının orta noktasını pergel ve çizgeç yardımıyla bulur.
Öğrenme Amacı 4	Pergel ve çizgeç yardımıyla bir doğruya, o doğruya ait olmayan bir noktadan geçen dikme inşa eder.
Öğrenme Amacı 5	Pergel ve çizgeç yardımıyla bir doğruya, o doğruya ait bir noktadan geçen dikme inşa eder.

Teorik Çerçeve

Bu çalışmada hedeflenen kazanımlara ve bu kazanımların ilişkili olduğu kavramların epistemolojik özelliklerine göre tasarlanacak olan öğrenme ortamının öğrencilerin bilişsel gelişimlerine göre revize edilmesine gereksinim duyulacağından araştırmanın teorik çerçevesi Varsayımsal Öğrenme Yörüngesi (Hypothetical Learning Trajectory-HLT) olarak belirlenmiştir. Simon (1995) tarafından matematik eğitiminde yapılandırmacı yaklaşımın öğrenme sürecine nasıl yansıtılabileceğine yönelik bir model olarak doğan HLT öğrenme amaçları, bu amaçları gerçekleştirmeye olanak tanıyabilecek öğretim etkinlikleri tasarımı ve bu etkinliklerin uygulanmasını içeren öğrenme sürecinin gelişimine yönelik varsayımda bulunmayı içermektedir. Amaçların gerçekleştirilmesinde kritik rol oynayan öğretim etkinlikleri tasarımı ve bu etkinliklerin uygulanmasını içeren varsayımsal öğrenme süreci iç içe girmiş bir şekilde bağımlılık göstermektedir (Simon ve Tzur, 2004). Varsayımsal öğrenme süreci, öğrenme etkinlikleri bağlamında öğrencilerin düşünme ve anlayışlarının nasıl evrileceğini tahmin etmeyi gerektirmektedir (Simon, 1995). Olası öğrenme sürecinin öngörülebilmesinde hem alanyazın destekli epistemolojik ve didaktik analiz, hem de düşünce deneyleri kritik bir rol oynamaktadır. Etkinliklerin olası öğrenme sürecindeki işlevine dayanak hazırlayan öğretim deneylerinde öğretmen ve öğrenciler arasındaki etkileşimin üst düzeyde olduğu bir öğrenme ortamının gerekliliğine dikkat çeken Simon (1995, 2014) varsayılan olası öğrenme yörüngesinde öngörülen yolların açığa çıkarılabilmesi için sürekli devam eden gözlemler yapılmasına dikkat çekmektedir. Öğrencilerin anlayışları ve düşüncelerindeki değişimin, süreçte yaşadıkları öğrenme zorlukları ve yanlışlarının, öğrenmeye etki eden diğer değişkenlerin ortaya konarak öğrenci eylemlerinin olası öğrenme süreci ile tutarlılığının karşılaştırılması, hedeflenen öğrenme amaçlarına ulaşılmasında varsayılan ve gerçekte olan öğrenme yörüngeleri arasındaki ayrımın yapılmasına yardım etmektedir (Mavrotheris ve Paparistodemou, 2015). Clements ve Sarama'ya (2004) göre bu teorik çerçevede en temel amaç, "öğrencilerin hedeflenen öğrenme amaçlarına doğru gelişimsel olarak ilerlemesini sağlayan olası bilişsel süreçler ve eylemler gerçekleştirmelerine olanak tanıyan bir dizi öğretim etkinliğinin uygulanması sırasında gerçekleşmesi olası yörüngeler ortaya koymaktır" (s. 83). Bu yörüngeler, öğrencilerin öğretim deneyi sırasında ortaya koydukları bilişsel eylemlerine göre revize edilerek tekrarlanabilir, yenilenebilir ve geliştirilebilir olarak alana sunulmaktadır.

Yöntem

Bilişsel gelişim incelemeyi amaçlayan bu nitel çalışma, bir öğrenme ortamı tasarlamayı içerdiğinden tasarım tabanlı bir araştırmadır (Bakker ve Van Eerde, 2015). Tasarım tabanlı araştırmalar en genel anlamda karmaşık eğitsel bir probleme bir çözüm sunmak amacıyla bir müdahale tasarlamak ve geliştirmek olarak tanımlanmakta iken aynı zamanda bu müdahalelerin özellikleri ile onların tasarım ve gelişim süreçleri hakkında bilgileri daha da yükseğe çıkarmayı amaçlamaktadır (Plomp, 2007). Tasarım çalışmaları sınırlı birtakım kurgulamalar içinde yürütülse de, bu spesifik kurgularda sadece yeni öğrenme oluşumlarını destekleyen süreçleri incelemeyi amaçlamamakta, öngörülen öğrenme için seçilmiş yönleri çerçeveleyen ve öğrenmeyi destekleyen olası süreçler için sürekli olarak gelişime açık, tekrarlanabilir yerel eğitsel bir teori (local instructional theory) ortaya koymayı amaçlamaktadır (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer ve Schauble, 2003). Gravemeijer'e (1999) göre yerel eğitsel teori, yapılandırılması hedeflenen bir kavram için öğrencilerdeki olası matematiksel gelişimi ortaya koyan ve gelişimi destekleyen bir dizi eğitsel etkinlik içeren aynı zamanda öğretmenler için başvuru kaynağı niteliği taşıyan bir çerçevedir. Yerel bir eğitsel teori; öğrenme amaçlarını, öğretim etkinliklerini ve öngörülen öğrenme rotasında öğrenme sürecini destekleyen araçların (ör. pergel ve çizgeç) kullanım biçimini ortaya koymayı gerektirir (Gravemeijer, 2004). Bu çalışmada temel geometrik oluşumların altıncı sınıf düzeyinde gerçekleştirilmesi sürecine yönelik öğrencilerin bilişsel eylemlerini açığa çıkaran ve aynı zamanda yerel eğitsel teori olarak görülen bir öğrenme yörüngesi ortaya konması amaçlanmaktadır.

Katılımcılar

Bu araştırmada öne sürülen varsayımsal öğrenme yörüngesini esas alan öğretim deneyleri kırsalda yer alan bir devlet okulunun altıncı sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Toplam 12 kişi olan

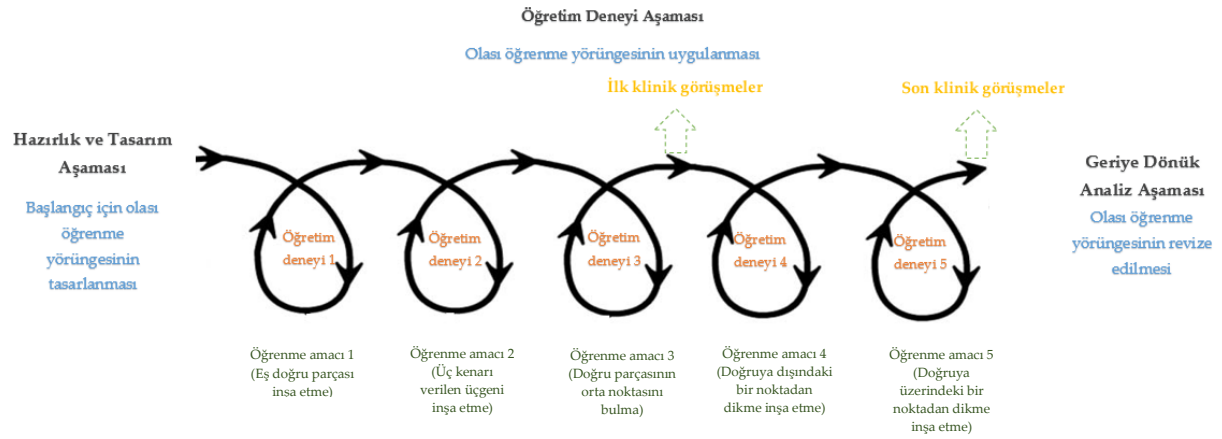
bu öğrencilerin, velilerinden de onay alınarak araştırma için gönüllü olarak katılımcı olmaları sağlanmıştır. Araştırmacılardan birisi 12 yıllık öğretmenlik deneyimine sahip, matematik eğitimi alanında doktora eğitimini bitirmek üzere olan bir matematik öğretmenidir. Diğer araştırmacı ise matematik eğitimi alanında uzmanlaşmış bir akademisyendir. Temel geometrik oluşumların gerçekleştirilmesi sürecinde öğrencilerin ortaya koyacakları bilişsel gelişimlerine yönelik derinlemesine veri toplayabilmek amacıyla, öğretim deneylerinin ilk üç amacına yönelik kısmı sonunda ve öğretim deneyi sonunda birebir klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerin gerçekleştirileceği odak katılımcılar ise amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yoluyla seçilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Araştırma öncesinde altıncı sınıf öğrencilerinin temel geometrik oluşumları gerçekleştirmelerinde önkoşul bilgiler olarak görülen nokta, doğru, doğru parçası ve ışın kavramlarına yönelik açık uçlu bir test hazırlanmıştır. Bu test *“matematikte (geometride) doğru parçası ne demektir? Tanımını nasıl yaparsınız? Aşağıda verilen boşluğa bir doğru parçası çizer misiniz?”* tarzında sorular içermektedir. Öğrencilerin bu testteki performansları doğrultusunda dört grup altında toplandıkları görülmüştür (Tablo 2). Ön testteki performanslar ölçüt olarak kabul edilmiştir. Oluşan bu dört grubun her birinden o grubu temsilen rastgele birer öğrenci odak katılımcı olarak belirlenmiştir. Bu katılımcıların bu çalışmada kullanılan takma isimleri ise birinci grupta Emre olmak üzere dördüncü gruba doğru sırasıyla Ceylan, Salim ve İlkan’dır.

Tablo 2. Temel Geometrik Şekillere Yönelik Geliştirilmiş Ön Testin Analizi Sonucu Farklılaşan Performanslar Doğrultusunda Oluşan Gruplar

Gruplar	Performanslar
1. Grup	Noktanın düzlem üzerinde bir yer işgal ettiğinin farkında olup, geometrik şekillerin yapı taşı olduğuna dair yorumda bulunur. Ayrıca boyutuna yönelik farkındalık gösterir. (ör. Her şey bir noktadır. Örneğin, bir çizginin başlangıcı noktadır. Noktanın kalınlığı uzunluğu yoktur) Doğruyu çizer ve çizimini doğrunun özelliklerine ilişkin açıklamalarla destekler. (ör. İki uçtan sonsuza giden bir geometrik şekil) Doğru parçasını çizer ve çizimini doğru parçasının özelliklerine ilişkin açıklamalarla destekler. (ör. İki uçtan sınırlı bir geometrik şekil) Işını çizer ve çizimini ışının özelliklerine ilişkin açıklamalarla destekler ve günlük yaşamından doğru kabul edilebilecek örnekler sunabilir. (ör. Bir başlangıç noktası olup diğer uçtan sonsuza giden bir geometrik şekil. Örneğin, güneş ya da lazer ışını gibi)
2. Grup	Noktayı geometrik nesne olan örnekler üzerinden açıklar. Ancak boyutuna dair herhangi bir yorumda bulunamadığı gibi temel geometrik şekillerden başlayarak bir yapıtaşını olarak kabul edilebileceğine dair bir farkındalığı yoktur (ör. Üçgenin köşelerini belirtmek için kullanılır) Doğru ve doğru parçasının özelliklerine ilişkin açıklamalar yapar ancak hangi şeklin hangisi olduğuna dair karmaşa yaşar. (ör. Doğru yerine doğru parçası çizer ancak iki uçtan sınırsız bir geometrik şekil açıklamasını yapar) Işını çizer ve çizimi ışının özelliklerine ilişkin açıklamalarla destekler. (ör. Bir başlangıç noktası olup diğer uçtan sonsuza giden bir geometrik şekil)
3. Grup	Noktayı geometrik olmayan nesnelere üzerinden matematiksel bir işlevine vurgu yaparak açıklar. (ör. Çarpma işleminde kullanılan bir sembol) Doğru, doğru parçasının özelliklerine ilişkin herhangi bir açıklama yapmadığı gibi hangi şeklin hangisi olduğuna dair karmaşa yaşar. Ancak farklı geometrik şekillerdeki varlığı üzerinden açıklamalar yapar. (ör. Doğru çizmesi istendiğinde doğru parçaları çizer. Doğru parçası çizmesi istendiğinde üçgen çizerek “üçgeni birleştiren bir şey” açıklamasını getirir) Işını doğru parçası gibi çizer ve günlük yaşamından edindiği bilgilerin ışını özelliklerine göre açıklamasında kısmen başarılı olabilmesine neden olduğu görülür (ör. “Işın sonsuza kadar gider ancak önüne bir engel gelirse durur” açıklaması)
4. Grup	Noktayı matematiksel olmayan nesnelere üzerinden açıklar. (ör. Cümlelerin sonuna konan işaret). Doğruyu çizer ancak ona dair yanlış açıklamalar sunar. (ör. Doğru için paralelkenar inşa edip “doğrular paralel giderler” açıklaması) Doğru parçasını çizer ancak herhangi bir açıklama ile destekleyemez. Işını çizer ancak herhangi bir açıklama ile destekleyemez.

Veri Toplama Süreci, Araçlar ve Analiz

Bu araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyleri toplam 12 saat sürmüştür. Tablo 1’de sunulan öğrenme amaçlarından sadece dördüncüsü için dört ders saati ayrılırken diğerleri için ise ikişer ders saati ayrılmıştır. Öğretim deneyleri aynı zamanda sınıfın matematik öğretmeni olan araştırmacı tarafından yürütülmüştür. İlk üç öğretim deneyi için sırasıyla eş doğru parçası inşa etme, üç kenarı verilen üçgeni inşa etme ve bir doğru parçasının orta noktasını bulma oluşumları hedef alınmıştır. Ardından odak katılımcıların bu oluşumları gerçekleştirme sürecindeki bilişsel eylemlerinin daha ayrıntılı ortaya konmasına olanak vermesi açısından birebir klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler, aynı zamanda öğretmen olan araştırmacı tarafından yürütülmüştür. Klinik görüşmelerde ilk olarak öğretim deneylerinde hedef alınan oluşumların gerçekleştirilmesi talep edilmiştir. Ardından ise farklılaşan durumlarda oluşumu gerçekleştirme süreçlerine odaklanılmış ve süreç boyunca onların eylemlerini gerekçelendirmeleri istenmiştir. Ayrıca alternatif yollar ortaya koyup koyamayacaklarına, temel oluşumlar ve geometrik yapılar arasında ilişkilerin farkında olup olmadıklarına yönelik sorgulamalar gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler sırasında odak katılımcılara sadece kağıt, kalem, pergel ve çizgeç verilmiş ve istenilen oluşumları gerçekleştirirken sesli düşünceleri istenmiştir. Böylece onların düşünme süreçleri ile ilgili daha zengin veri toplanabilmesi hedeflenmiştir. Örneğin, görüşme sırasında dikme inşa ederken sesli düşünen bir öğrencinin *“burada bir ikizkenar üçgen çizelim. Sonra burasının (tabanının) orta noktasını buluyorum”* gibi açıklamaları onun dikme inşasında ikizkenar üçgen inşa ettiğinin ve orta nokta bulma oluşumunu yansıttığının farkında olduğunun göstergesi olarak görülmüştür. Yeri geldiğinde *“neden pergelini o kadar açıyorsun?, Pergel kullanman sana nasıl bir fayda sağlıyor?, Neden böyle yapıyorsun?, Nereden biliyorsun senin yaptığının doğru olduğunu?, Farklı bir yoldan yapabilir misin?, Bu noktayı ya da noktaları kritik yapan özellik ne? Açıklar mısın?, Daha farklı noktalar bulabilir misin?, Bu oluşumu gerçekleştirirken araç olarak kullandığın başka bir şekil var mı? Gösterebilir misin? Açıklar mısın?”* gibi sonda soruları yöneltilmiş ve cevaplamaları için yeterli zaman tanınmıştır. Bu sayede odak katılımcıların öğretim deneyinde oluşumu gerçekleştirme sırasında ortaya koydukları eylemleri sadece ezbere bir takım sıralı adımlar olarak mı ezberlediği yoksa hangi adımı neden attığının farkında olup olmadığı, adımlar için alternatif yollar da sunarak ne anlama geldiğini açıklayıp açıklayamadığı, sadece görsel elemanları esas alarak deneysel gerekçelendirmeler mi yapabildiği yoksa matematiksel dayanaklı kavramsal alt yapıyı işaret eden gerekçelendirmelerle savunup savunmadığı, bir oluşumu gerçekleştirirken diğer oluşumları yansıtmış olabileceğinin farkında olup olmadığı (ör. üç kenarı verilen üçgeni inşa ederken eş doğru parçası inşa etme oluşumunu yansıtmama) veya bir geometrik yapıyı inşa ederken diğer geometrik yapılarla ilişkisinin varlığını ortaya koyup koyamadığı (ör. bir doğru parçasının orta noktasının bulunması sırasında pergeli açıklığına göre ortaya ikizkenar ya da eşkenar üçgen çıkması) gibi bilişsel gelişimlerinin incelenmesinde gerekli görülen sorulara yönelik derinlemesine veri elde edilmiştir. İlk klinik görüşmelerin ardından gerçekleştirilen dördüncü öğrenme amacına yönelik öğretim deneyi için 4 ders saati ayrılmasının sebebi ise bir doğruya üzerindeki veya dışındaki bir noktadan dikme inşa etme oluşumunun temelini oluşturan ikizkenar üçgende tepe noktasından tabana dikme inşa etme sürecine yönelik ekstra ders saati ayrılmasıdır. İkizkenar üçgen inşa etme ve ardından tepe noktasından tabanına inilen dikmenin inşa edilmesi ve daha sonrasında bu sürecin verilen bir doğruya, o doğruya ait olmayan bir noktadan geçen dikme inşa edilmesi sırasında yansıtılması şeklinde genişleyen süreci içeren öğretim deneyi için dört ders saati ayrılmıştır. Son olarak ikizkenar üçgende dikme inşa etme sürecinin bir doğruya kendi üzerindeki bir noktadan dikme inşa etme için yansıtılmasını hedef alan son iki saatlik öğretim deneyi yürütülmüştür. Ardından odak katılımcılarla son klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırma süreci en genel çerçevede Şekil 1’de gösterilmektedir.



Şekil 1. Araştırma Süreci

Öğretim deneyi boyunca öğrencilerin stratejilerini, başlangıç ve varış noktalarını, çıkış yollarını, attıkları adımların gerekçelerini vb. eylemlerini not ettikleri bireysel ve grup çalışma kâğıtları veri toplama amacıyla kullanılmıştır. Derslerde öğrencilere sunulan görevler genellikle öğretmen tarafından sözel olarak onlara aktarılmış ve onlardan bu görevleri başlangıçta boş ve beyaz olan çalışma kâğıtları üzerinde yerine getirmeleri talep edilmiştir. Bu sayede onların temel geometri bilgilerini yansıtmaları için fırsat verilmiştir. Örneğin görev, “İlk olarak düzlem üzerinde bir doğru inşa edelim. Şimdi bu doğruya ait olmayan bir nokta belirleyelim. Noktanın adını verelim. Şimdi de sizden istediğim bu doğruya bir dikme inşa edelim ancak doğruya ait olmayan bir nokta belirlediğiniz ya hani işte dikmenin o noktadan da geçmesi gerekiyor. Yapabilir misiniz?” şeklinde onlara aktarılmıştır. Bu süreçte doğru inşa etme, nokta belirleme, noktayı isimlendirme, doğrunun sonsuz noktadan oluştuğu ve doğruya ait olmayan noktaların varlığı gibi temel geometri bilgilerini kullanmaları için fırsat verilmektedir. Öğretim sürecinin devamında ise, başlangıçta adım adım sunulan bu tarz görevler onlara doğrudan aktarılmıştır: “Düzlemde yatay veya dikey olmayan bir doğruya, o doğruya ait olmayan bir noktadan geçen bir dikme inşa ediniz. Bu süreçte attığımız adımları gerekçeleriyle birlikte açıklayınız”. Öğretim deneylerinde yürütülen her ders video kamera ile kayıt altına alınmış olup bu kayıtların yanı sıra öğretmen olan araştırmacı tarafından süreç boyunca saha notları tutulmuştur. Öğretim deneyinin tek bir kamera ile tüm sınıfı görecektir şekilde kayıt yaptığı düşünülerek ders video kayıtları ile toplanan verilerde kayıp yaşanacağı öngörülmüştür. Veri kaybının en aza indirgenmesinde, bireysel çalışma kâğıtlarına not edilen açıklamaların ve tutulan bu saha notlarının önemli katkısı olmuştur. Örneğin, eş doğru parçası inşa etme oluşumuna yönelik ders video kayıtlarında, öğrencinin bireysel olarak oluşumu gerçekleştirme süreci izlenememektedir. Çalışma kâğıtlarında bazı öğrencilerin sadece çizgeç üzerinde işaretleme yaparak eş doğru parçası inşa ettiğini açıklaması onların bu oluşum için ortaya koyduğu bilişsel süreç hakkında veri sağlarken bazı öğrencilerin ise çalışma kâğıtlarında bu yönde herhangi bir açıklaması görülmemektedir. Ancak öğretmen tarafından tutulan saha notlarında bu öğrencilerden bazılarının pergel açıklığını kullandığı ancak olası noktaları göstermek yerine sadece iki nokta belirlediğini sözel olarak ifade ettiği görülmektedir. Bu tarz açıklamalar ve kritik olabileceği öngörülen eylemler öğretmen olan araştırmacı tarafından öğretim sürecinde not edilmiş ve bu sayede o öğrencilerin bilişsel süreçleri hakkında derinlemesine veri elde edilmesi amaçlanmıştır. Bunun yanında öğrencilere öğretim döngüleri sonrasında verilen ödev kâğıtları veri toplamada bir araç olarak işlev görmüştür. Ödev kâğıtlarında, dersteki görevlere benzer sorular verilerek yine gerekçeli açıklamaların yapıldığı ve alternatif yolların ortaya konduğu oluşum süreçleri gerçekleştirmeleri istenmiştir. Örneğin, orta nokta bulma oluşumuna yönelik dersten sonra verilen ödev kâğıdında sadece pergel ve çizgeç kullanımına dikkat çekilerek “verilen doğru parçasının orta noktasını bulunuz (yatay, dikey ve çapraz doğru parçası verilerek)”, “eşkenar bir üçgen inşa ediniz ve aynı üçgen üzerinde tüm kenarların orta noktalarını bulunuz”, “aşağıda verilen doğru parçaları bir üçgenin kenarlarıdır. Buna göre bu kenarlara sahip üçgeni inşa ederek kenarlarının orta noktalarını bulunuz” görevleri yer almıştır. Odak katılımcılarla gerçekleştirilen her biri ile ikişer kez olmak üzere

toplam sekiz klinik görüşme ise bilişsel gelişimlerin derinlemesine incelenmesine olanak tanınması amacıyla veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Öğretim deneyi sonunda ders video kayıtları ve görüşmelerin dökümleri yapılmış ve ardından öğrencilerin düşünme süreçleri ve eylemleri üzerine elde edilen veriler sürekli karşılaştırmalı analiz (constant comparative analysis) yöntemi ile analiz edilmiştir (Bakker, 2004; Glaser ve Strauss, 1967). Öncelikle elde edilen veriler kronolojik sırası da dikkate alınarak bölümlere ayrılmıştır. Bu bölümlerin belirlenmesine Tablo 4'te sunulan başlangıç öğrenme yörüngesi ve öğrenme amaçları rehberlik etmiştir. Her bir bölüm için ele alınan bireysel ve grup çalışma kâğıtları, ders video kayıtları ve görüşme dökümlerinde araştırma sorusu açısından değerli görülen cümleler, ifadeler, açıklamalar, eylemler kodlanmış ve bu kodlar kategorize edilerek tekrar eden temalara ulaşılmıştır. Ardından bu temalar altında yer alan kodların başlangıç öğrenme yörüngesinde varsayılan eylemler ile tutarlılığı test edilmiştir. Bakker (2004) test etmeyi, "*doğrulamalar ve çürütmeler aramak*" olarak açıklamaktadır (s. 45). Her bir bölüm için iki farklı araştırmacının ayrı ayrı yapmış oldukları kodlamaların tutarlılığı incelenmiş ve yüzde 93 oranında tutarlılık tespit edilmiştir. Tutarlı olunmayan kısımlarla ilgili yargıya varılmasında ise gerçekleştirilen görüşmelerde elde edilen verilerin analizi, derinlemesine bilgi sağlaması yönüyle belirleyici olmuştur. Örneğin, üç kenarı verilen bir üçgen inşasında ilk doğru parçasını tek noktaya dayalı olarak aktaran katılımcı için, görüşme sırasında kendisi gerekli gördüğünde ya da kendisine doğrudan sorulduğunda diğer olası noktaların da farkında olduğunu göstermesi, onun dinamikleşen düşünme sürecinde olduğu yargısına varılmasında kritik bir rol oynamıştır. Saha notları ve ev ödevleri ise içerik analizi yöntemiyle nitel olarak analiz edilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu veri toplama araçlarından elde edilen sonuçlar da tutarlı olunmayan kısımlarla ilgili yargıya varılmasına önemli katkı sağlamıştır. Örneğin, üç kenarı verilen bir üçgen inşasında olası noktaların tamamını çember olarak belirleyen bir odak katılımcı ile ilgili tutulan saha notunda "*aslında çemberin tamamını çizmeye gerek yok hocam kesişen kısımları çizmek yeterli ama ben yine de çizdim*" açıklaması yer almaktadır. Bu veri, odak katılımcının olası noktaların gerekli görülen bir kısmına karar vererek yay inşa edebildiğini göstermesi açısından önemli bir gösterge olarak işlev görmüştür. Bu açıdan bakıldığında saha notlarından elde edilen veriler olmasaydı, bu öğrenci ile ilgili olası noktaları belirlerken sadece çember inşa edebildiği henüz yay inşası ile olası noktaların yeterli kısmını ortaya koyabileceğinin farkında olmadığı yargısına varılacaktı.

Durağan düşünmeyi, eylemlerin veya düşünmenin otomatikleşmesi ve bunun sonucu olarak karşılaşılan durumlarda sadece standart algoritma ve işlemler uygulanabilmesi olarak açıklayan Pelczer, Singer ve Voica (2014), dinamik düşünmeyi ise farklılaşan durumlar karşısında uyum sağlayabilecek şekilde eylem ve düşünceleri değiştirilebilme, bir durumun ihmal edilebilir yönlerini görebilmek için daha geniş perspektiften bakabilme ve bu sayede farklı yorum ve öneriler sunabilme, şekilleri farklı pozisyonlarda görüp onun değişen değişmeyen yönlerini yorumlayabilme gibi zihinsel durumlarda daha serbest davranabilme olarak açıklamaktadır. Bu çalışmada katılımcıların matematiksel gerekçelendirmesini yapmadan ezbere bir takım adımlar atması, sadece belirli durumlar için oluşumu gerçekleştirebilmesi (ör. sadece yatay doğru parçalarının orta noktasını bulabilmesi), alternatif oluşumlar ya da adımlar gerçekleştirememesi (ör. eşkenar üçgen inşa ederken inşayı sağlayan kesişim noktasının sadece bir tanesini görebilmesi), farklılaşan bir durum ile karşılaştıklarında oluşumu gerçekleştirememeleri ya da kontrolü kaybetmeleri (ör. doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa ederken doğruyu uzatması gerektiği durumlarda herhangi bir eylem ortaya koyamama ya da uzatmadan benzer adımları atarak oluşumu gerçekleştirme girişimi) durağan düşünme süreçlerinin göstergesi olarak yorumlanmıştır. Oluşumun farklılaşan durumlar için de gerçekleştirilebilmesi ve eylemlerin matematiksel olarak gerekçelendirilebilmesi, aynı oluşum için farklı eylemler ortaya konabilmesi ve savunulabilmesi (ör. orta nokta bulunurken farklı pergel açıklıklarının olabileceğini gösterme ve savunabilme), oluşumun farklılaşan örneklerinde değişen ve değişmeyen yönlerini görebilme, oluşumun inşasını sağlayan olası farklı durumları ortaya koyabilme ve gerekçelendirebilme gibi daha esnek düşünme eylemleri ise dinamik düşünme süreçlerinin göstergesi olarak yorumlanmıştır. Başlangıç olası öğrenme yörüngesinin rehberlik ettiği öğretim deneylerinin ardından elde edilen sonuçlar doğrultusunda başlangıçta varsayılan öğrenme yörüngesinde gerekli görülen

revizyonlar yapılmıştır. Ayrıca ulaşılan sonuçların doğruluğu çalışma kâğıtları, ev ödevleri ve saha notları ile güçlendirilmiştir. Örneğin, öğretim sürecinde orta nokta bulma oluşumunda çemberlerin kesişim noktalarından sadece birisini esas alan bir katılımcının hem bireysel çalışma kâğıdında hem saha notlarında diğer noktanın da farkında olduğu, çizgeci o iki noktadan geçecek şekilde kullandığı ve bu eylemlerini savunabildiği görülmüştür. Ayrıca ev ödevlerinde iki kesişim noktasını esas alarak orta noktayı belirlemesi dikkat çekmiştir. Görüşme sırasında orta noktayı bulurken çemberlerin kesiştiği iki noktayı esas aldığı, bu noktaların kritik özelliğini savunabildiği, hatta benzer özelliğe sahip farklı noktalar da ortaya koyabileceğini göstermiştir. Bu sayede veri çeşitlemesi (triangulation) gerçekleştirilerek çalışmanın güvenilirliği sağlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

Tasarım tabanlı çalışmalar *hazırlık ve tasarım, öğretim deneyi ve geriye dönük analiz* olmak üzere üç temel aşamadan oluşmaktadır (Bakker ve Van Eerde, 2015). Bu bölümde araştırma boyunca gerçekleştirilen işlemlere ilişkin bilgiler bu üç temel aşamayı esas alan başlıklar altında sunulacaktır.

Hazırlık ve Tasarım Aşaması

Bu çalışmada Öklid'in temel geometrik oluşumlarının altıncı sınıf düzeyinde gerçekleştirilmesine yönelik başlangıç olası öğrenme yörüngesinin tasarlanması için epistemolojik ve didaktik yönden kapsamlı analize olanak tanıyacak şekilde alanyazın taraması derinleştirilmiştir. Ayrıca bu temel oluşumların matematik öğretim programında ve ders kitaplarında nasıl değerlendirildiğinin incelenmesi, öğrencilerin bu konu kapsamında yaşadıkları zorlukların neler olabileceği, neleri öğrenebilecekleri ve nasıl gelişim gösterebilecekleri hakkında yapılan araştırmalar hedeflenen öğrenme amaçlarına ulaşma sürecinde öğrencilerin olası bilişsel ve fiziksel eylemlerine ışık tutmuş ve olası eğitsel müdahaleler için hazırlıklı olunmasını sağlamıştır. En genel anlamda bu süreci açıklamak gerekirse örneğin, doğru parçasının orta noktasının bulunması oluşumuna yönelik MEB tarafından 2018-2019 eğitim öğretim yılı için yayınlanan ortaokul ders kitapları ve ortaokul matematik dersi öğretim programı (MEB, 2018) incelendiğinde, pergel ve çizgeç yardımıyla oluşumun gerçekleştirilmesine yer verildiği ancak sadece gösterip yaptırma yöntemine başvurulduğu görülmüştür. Alanyazın incelendiğinde bu ve benzer oluşumlarda öğretmenlerin de bu yöntemi kullandığı ya da bu tarz oluşumları hiç yaptırmadıkları dikkat çekmiş ve onların dahi attıkları adımların farkında olmadığı sonucuna ulaşılmıştır (ör. Erduran ve Yeşildere, 2010; Karakuş, 2014; Lim, 1997; Öçal ve Şimşek, 2017; Ulusoy, 2019). Dolayısıyla öğrencilerin bu atılan adımları anlamlandırarak oluşumları gerçekleştirebilmesinde öğretmenin hangi görevler ile nasıl destek verebileceğinin öngörülebilmesi için bu oluşumun kavramsal alt yapısının ortaya çıkarılması yönünde epistemolojik incelemesine girişilmiştir. Orta noktanın o doğru parçası için kritik özelliği, pergel açıklığının ne anlam ifade ettiği ve ne kadar olması gerektiği, aynı pergel açıklığında oluşan çemberlerin kesişim noktalarının kritik özelliği ve onların oluşturduğu doğrunun (orta dikme) bu oluşum için ne anlam ifade ettiği gibi sorulara cevap bulunması sağlanmıştır. Oluşumun gerçekleştirilmesinde atılan adımların anlamlandırılmasına olanak tanıyacağı öngörülen bu kritik eylemler olası başlangıç öğrenme yörüngesinin oluşturulmasına doğrudan katkı sağlamıştır. Hedeflenen oluşumun öğrenme ve öğretme sürecine yönelik genişletilen alanyazın taraması doğrultusunda 11 yıllık öğretmenlik deneyime sahip aynı zamanda matematik eğitimi alanında doktora eğitimini sürdürmekte olan bir öğretmenin ve geometri eğitiminde çalışmaları bulunan bir akademisyenin görüşlerine de başvurularak olası öğrenme yörüngesine son şekli verilmiştir. Hedeflenen öğrenme amaçlarına ulaşılmasında kritik bir role sahip olan görevler, araştırmacıların deneyimleri ve gerçekleştirilen düşünce deneyleri yardımıyla öğrencilerin olası öğrenme ve düşünme süreçleri de göz önünde bulundurularak tasarlanmıştır. Bu görevlerin tasarlanmasında ve öğrencilere yöneltme güzergâhının belirlenmesinde Smart'ın (1998) geometrik oluşumların gerçekleştirilmesinde ortaya koyduğu adımlar rehberlik etmiştir (Tablo 3).

Tablo 3. Geometrik Oluşumların İnşasında Gerçekleşmesi Olası Adımlar (Smart, 1998 s. 168)

1. Analiz	Bu adımda, çözen birey önce oluşumu gerçekleştirdiğini varsayar ve daha sonra orijinal problemde verilen gerçekler ve şekildeki bilinmeyen bileşenler arasında ihtiyaç duyulan bağların sağlanması için sonucun tamamlanmış resmini analiz eder.
2. Oluşum	Bu adımın sonucu pergel ve çizgeçle yapılan çizimin kendisi ve oluşum izlerinin gösterimidir.
3. Kanıt	Oluşan şeklin gerçekten aranan şekil olup olmadığının kanıtlanması gerekir.
4. Tartışma	Olası çözümlerin sayısı ve herhangi bir olası çözüm için şartlar bu adımda açıklanır.

Tasarlanan ana görevler ve bu görevler doğrultusunda öğrencilerin ortaya koyması beklenen olası bilişsel ve fiziksel eylemleri içeren başlangıç olası öğrenme yörüngesi Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. Temel Geometrik Oluşumların Altıncı Sınıflarda Öğrenilmesi Sürecine Yönelik Başlangıç Olası Öğrenme Yörüngeleri**Başlangıç Olası Öğrenme Yörüngesi**

Öğrenme Amacı 1: Pergel ve çizgeç yardımıyla eş doğru parçası inşa eder.

Görev 1: Verilen doğru parçasına eş bir doğru parçası çizin-Bir doğru parçası inşa ederek düzlemde herhangi bir yere bu doğru parçasını aktarın.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Oluşturulacak olan ve var olan doğru parçalarının uzunluklarının eşit olacağını farkına varma.
- ♣ Aktarılacak doğru parçasının uzunluğunu belirlemek için pergelin açıklığını kullanma.
- ♣ Pergel açıklığını kullanarak bu açıklık kadar uzaklığa sahip iki nokta belirleme ve bu noktalar arasındaki doğru parçasını inşa etme.

Görev 2: Verilen doğru parçasını, A noktası (doğru üzerinde olmayan bir başka nokta) uç noktalarından biri olacak şekilde aktarın.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Aktarılacak doğru parçası uzunluğunda pergel açıklığı oluşturma ve A noktası uç noktalardan biri olmak koşuluyla diğer noktayı bu pergel açıklığını kullanarak belirleme.
- ♣ A noktası ve aktarılacak doğru parçası kadar uzaklıkta belirlenen diğer nokta arasındaki doğru parçasını inşa etme.

Görev 3: A noktası (doğru üzerinde olmayan başka bir nokta) uç noktalarından biri olmak koşuluyla verilen doğru parçasına eş olarak inşa edilebilecek olası doğru parçalarını gösterin. A noktası sabit kalmak şartıyla eş doğru parçasını sağlayan diğer uç nokta için olası noktaları gösterin.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Aktarılacak doğru parçası uzunluğunda pergel açıklığı oluşturma ve A noktası uç noktalardan biri olmak koşuluyla diğer uç nokta için olası noktaları bu pergel açıklığını kullanarak çember inşası ile belirleme.

Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler

- ♣ Doğru parçasının aktarılmasında uç noktalardan birisinin rastgele diğerinin ise o noktadan doğru parçası kadar uzaklıkta bir nokta olmak koşuluyla alınabileceğini fark eder.
- ♣ Çizgeç üzerinde işaretleme yapmanın yasak olduğunu kabul eder ve belirli uzaklıkta bir noktayı pergel aracılığıyla belirler.
- ♣ Bir noktadan belirlenen bir uzunluk kadar uzaklıkta olan olası noktaları çember inşası ile açığa çıkarabilir.

Tablo 4. Devamı**Başlangıç Olası Öğrenme Yörüngesi****Öğrenme Amacı 2: Üç kenarı verilen bir üçgeni pergel ve çizgeç yardımıyla inşa eder.****Görev 4:** Verilen üç doğru parçası bir üçgenin kenarlarıdır. Bu üçgeni inşa ediniz.**Öngörülen Öğrenme Süreci**

- ♣ Oluşturulacak üçgen inşası için verilen doğru parçalarının birer uç noktalarının ortak olacak şekilde aktarılması gerektiğinin farkına varma.
- ♣ Herhangi bir doğru parçasını düzlemde üçgen inşasını gerçekleştireceği yere aktarma.
- ♣ İlk olarak aktarılan doğru parçasının uç noktalarına verilen diğer doğru parçalarını aktarma.
- ♣ İlk olarak aktarılan doğru parçasının uç noktalarına ayrı ayrı diğer doğru parçaları kadar uzaklıktaki olası noktaları pergel yardımıyla belirleme.
- ♣ Ortaya çıkan çemberlerin kesişim noktalarından birisini her iki doğru parçasının aktarımını sağlamasından dolayı kritik görerek üçüncü köşe olarak belirleme ve sonuç olarak istenilen üçgeni inşa etme.

Görev 5: (Görev 4' ün devamı olarak) Üçgenin üçüncü köşesini buldunuz. Üçüncü köşe olabilecek başka nokta var mı? Varsa gösteriniz.**Öngörülen Öğrenme Süreci**

- ♣ İlk olarak aktarılan doğru parçasının uç noktalarına diğer doğru parçalarını aktarmak için inşa edilen olası noktaları içeren çemberlerin kesişim noktasının ilk aktarılan doğru parçasına göre simetrik olacak şekilde iki tane olduğunun farkında olma.

Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler

- ♣ Doğru parçasını aktarma oluşumunu olası noktaları belirleyerek yansıtır.
- ♣ Deneme yanılma yolu ile istenilen kritik noktayı bulmanın hem uğraşı gerektiren hem de doğruluğu şüpheli olduğunu fark eder.
- ♣ Çemberlerin kesişim noktalarının kritik oluşunu görür ancak her kesişim noktasının istenilen oluşumu sağlamada kritik olmadığını da fark eder.
- ♣ Doğru parçalarından birisini rastgele diğerlerini ise rastgele atanan doğru parçasının uç noktalarına aktarması gerektiğini anlamlandırır.

Öğrenme Amacı 3: Bir doğru parçasının orta noktasını pergel ve çizgeç yardımıyla bulur.**Görev 6:** Verilen doğru parçasının orta noktasını bulunuz.**Öngörülen Öğrenme Süreci**

- ♣ Doğru parçasının orta noktasının uç noktalara eşit uzaklıkta olduğunun farkına varma.
- ♣ Belirli bir uzaklık belirleyerek uç noktalardan o uzaklık kadar uzakta olan olası noktaları pergel yardımıyla belirleme (kendisinin belirlediği bir yarıçapta uç noktalar merkez olacak şekilde çemberler inşa etme).
- ♣ Böylece çemberlerin kesişim noktalarının uç noktalara eşit uzaklıkta olması yönüyle kritik olduğunu fark etme.

Görev 7: (Görev 6'nın devamında) Pergeli daha farklı açıklıkta kullanabilir misiniz? Uç noktalara eşit uzaklıkta kaç farklı nokta bulabilirsiniz? (Orta dikmeyi oluşturan noktalar sorgulanıyor)**Öngörülen Öğrenme Süreci**

- ♣ Pergelin açıklığını değiştirerek uç noktalara eşit uzaklıkta olan başka kritik noktalar (çemberlerin kesişim noktaları) bularak onların doğrusal olduğunu görme ve kesişim noktalarından oluşan doğruyu (orta dikme doğrusu) inşa etme.
- ♣ Doğru parçası ile orta dikme doğrusunun kesişim noktasını doğru parçasının orta noktası olarak belirleyebilme.
- ♣ Pergelin açıklığının doğru parçasının yarısından uzun olmak şartıyla sonsuz uzunlukta olabileceğini yorumlayabilme.

Tablo 4. Devamı**Başlangıç Olası Öğrenme Yörüngesi****Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler**

- ♣ Uç noktalara eşit uzaklıkta olan noktalar kümesini (orta dikme doğrusu) fark ederek orta noktanın da bu noktalardan sadece birisi olduğunu fark eder.
- ♣ Çemberlerin teğet noktasının kritik nokta ya da aranılan nokta olarak belirlenmesinin teğet noktanın tam olarak açığa çıkamamasından dolayı kabul edilemez olarak görüldüğünü anlamlandırır.
- ♣ Kritik noktaların çemberlerin kesişimi ile elde edilebileceğinin yanı sıra doğruların kesişimi ile de elde edilebileceğini fark eder.
- ♣ Pergel açıklığının farklılaşmasına rağmen uç noktalara eşit uzaklıklı olma ortak özelliğinin değişmez kaldığını fark eder.

Öğrenme Amacı 4: Pergel ve çizgeç yardımıyla bir doğruya, o doğruya ait olmayan bir noktadan geçen dikme inşa eder.

Görev 8: Bir ikizkenar üçgen çizin.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ İkizkenar üçgenin tepe noktası olacak bir nokta belirleme ve o noktadan eşit uzaklıktaki olası noktaları pergel yardımıyla çember inşa ederek ortaya çıkarma.
- ♣ Çember üzerindeki noktalardan herhangi ikisinin taban köşeleri olarak alınabileceğinin farkında olarak bir ikizkenar üçgen inşa etme.

Görev 9: Bir doğru üzerinde ikizkenar üçgenin tabanını kendiniz belirleyin. Ardından bu tabana ait ikizkenar üçgeni oluşturun.

Görev 10: Doğru dışında bir nokta belirleyin. Bu noktayı tepe nokta, tabanı ise verilen doğru üzerinde yer alan bir doğru parçası kabul eden ikizkenar üçgeni inşa ediniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Doğru dışındaki bir noktadan eşit uzaklıktaki olası noktaları pergel yardımıyla belirleme.
- ♣ Bu noktalardan ikisinin doğru üzerinde yer aldığını fark ederek onları taban köşeleri kabul eden ikizkenar üçgeni inşa etme.

Görev 11: İkizkenar üçgenin tepe noktası ile tabanının orta noktasını uç noktalar olarak kabul eden doğru parçasını inşa edin.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ İkizkenar üçgenin tabanının orta noktasını, orta nokta bulma oluşumunu yansıtarak belirleme.
- ♣ Tepe noktası ile tabanın orta noktasını uç kabul eden doğru parçasını çizgeç yardımıyla inşa etme.

Görev 12: “İkizkenar üçgende tepe noktasından tabana inilen dikme (yükseklik) tabanı iki eş parçaya böler” bilgisi doğrultusunda tepe noktasından tabana inen yüksekliği gösteriniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Önceden inşa edilen, tepe noktası ile tabanın orta noktasının uç noktalar olduğu doğru parçasının yükseklik (dikme) olduğunun farkına varma.
- ♣ Tepe noktasından tabana dikme inşa edilmesi talep edildiğinde tabanın orta noktasını bulması gerektiğinin farkında olma.

Görev 13: Bir doğru ve bu doğru üzerinde olmayan (doğru dışında) bir nokta verilmiştir. Bu noktadan doğruya bir dikme inşa ediniz.

Tablo 4. Devamı**Başlangıç Olası Öğrenme Yörüngesi****Öngörülen Öğrenme Süreci**

- ♣ İkizkenar üçgende tepeden tabana dikme (yükseklik) inşa etme sürecini, talep edilen bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa etme ile ilişkilendirme yönünde düşünme süreçleri ortaya koyma.
- ♣ Doğru dışındaki nokta tepe noktası olmak üzere ona eşit uzaklıkta olan olası noktaları pergel yardımıyla çember ya da yay inşa ederek belirleme ve bu noktalardan doğru üzerinde kalan ikisi arasında kalan doğru parçasının taban olduğunun farkında olma.
- ♣ Tabanın orta noktasını, orta nokta bulma oluşumu sürecini yansıtarak belirleme ve tepe noktası ile tabanın orta noktası arasındaki doğru parçasını yükseklik olarak inşa etme.
- ♣ İnşa edilen yüksekliğin bir doğru parçası olduğunu fark etme ve istenildiği takdirde o doğru parçasını içine alan doğruyu inşa edebilme.
- ♣ Başlangıçta ikizkenar üçgenin eş kenarlarını da inşa ederken, ilerleyen zamanlarda ise bu kenarları ortaya koymadan dikme inşasını gerçekleştirme. İkizkenar üçgeni açıkça ortaya koymasa da bu oluşumun adımlarının savunulmasında matematiksel bir gerekçe olarak ona atıfta bulunma.

Görev 14: (Görev 13' ün devamında) Doğru dışındaki bir noktadan doğruya dikme inşa ederken pergel açıklığının ne kadar olması gerektiği konusunda ne düşünüyorsunuz? Gösteriniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Doğru dışındaki nokta merkez olmak üzere inşa edilmesi beklenen çember ya da yay için pergel açıklığının doğruyu iki noktada kesecek açıklıkta olmak şartıyla sonsuz farklı uzunlukta olabileceğinin farkında olma.
- ♣ Tabanın orta noktasını bulma oluşumunda ise taban olan doğru parçasının yarısından fazla olmak koşuluyla pergel açıklığının sonsuz farklı uzunlukta olabileceğinin farkında olma.

Görev 15: Yatay olmayan bir doğru inşa ederek bu doğru dışında bir nokta belirleyin. Belirlediğiniz noktadan geçen ve o doğruya dik olan başka bir doğru inşa edebilir misiniz?

Görev 16: Verilen doğrulara (yatay olmayan doğrular) dışında belirlenen noktalardan geçen dikmeler inşa ediniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Yatay olmayan bir doğruya, farklı yerlerde alınan noktalardan dikme inşa edebilme.
- ♣ İnşa sürecinde farklı ikizkenar üçgenler inşa edebildiğini gösterme, pergel açıklığı değişkenliğini yorumlayabilme, gerektiğinde doğruyu uzatabilme vb. daha esnek eylemlerin farkında olma ve matematiksel gerekçelerle savunabilme.

Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler

- ♣ İnşa edilen oluşumda herhangi bir adımı ya da elemanı ikizkenar üçgende tepe noktasından tabana inilen dikmenin tabanı iki eş parçaya bölmesi teoremi ile savunabilir.
- ♣ Doğru parçasının orta noktasını bulma oluşumunu yansıtır ve tepe noktasının tabanın orta dikmesi üzerinde kaldığını fark eder.
- ♣ Kritik noktaların çember ile çember, doğru ile doğru kesişiminden elde edilebileceğinin yanı sıra çember ile doğru kesişimi ile de elde edilebileceğini fark eder.

Öğrenme Amacı 5: Pergel ve çizgeç yardımıyla bir doğruya, o doğruya ait bir noktadan geçen dikme inşa eder.

Görev 17: Bir doğru ve bu doğru üzerinde bir nokta verilmiştir. Bu doğruya o noktadan geçen bir dikme inşa ediniz.

Tablo 4. Devamı**Başlangıç Olası Öğrenme Yörüngesi****Öngörülen Öğrenme Süreci**

- ♣ İkizkenar üçgende tepe noktasından tabana dikme (yükseklik) inşa etme sürecini, talep edilen bir doğruya kendi üzerindeki bir noktadan geçen dikme inşa etme ile ilişkilendirme yönünde düşünme süreçleri ortaya koyma.
- ♣ Pergelini herhangi bir açıklıkta açarak doğru üzerinde verilen noktadan o açıklık kadar uzakta yer alan olası noktaları çember ya da yay yardımıyla belirleme ve bu olası noktalardan doğru üzerinde yer alan iki tanesinin ikizkenar üçgenin tabanının uç noktaları olması yönüyle kritikliğinin farkında olma.
- ♣ Doğru üzerinde oluşturulan doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olan doğru dışında bir nokta belirleme ve bu noktanın ikizkenar üçgenin tepe noktası olduğunun farkında olma.
- ♣ Pergelin açıklığını rastgele belirleyerek doğru üzerinde oluşturduğu doğru parçasının uç noktalarından belirlediği açıklık kadar uzakta olan olası noktaları çember ya da yay olarak belirleme ve çemberlerin ya da yayların kesişim noktalarından birisinin ikizkenar üçgenin tepe noktası olabileceğinin farkında olma.
- ♣ Doğru dışında belirlemiş olduğu nokta (tepe noktası) ile doğru üzerinde dikme inşa edilmesi beklenen nokta (tabanın orta noktası) arasındaki doğru parçasını yükseklik olarak çizgeç yardımıyla inşa etme.
- ♣ Başlangıçta ikizkenar üçgenin eş kenarlarını da inşa ederken, ilerleyen zamanlarda ise bu kenarları ortaya koymadan dikme inşasını gerçekleştirme. İkizkenar üçgeni açıkça ortaya koymasa da bu oluşumun adımlarının savunulmasında matematiksel bir gerekçe olarak ona atıfta bulunma.

Görev 18: (Görev 17'nin devamı olarak) Bir doğruya üzerindeki bir noktadan geçen bir dikme inşa ederken pergel açıklığının ne kadar olması gerektiği konusunda ne düşünüyorsunuz? Gösteriniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Doğru üzerinde verilen nokta merkez olmak koşuluyla inşa edilecek çember ya da yay için pergel açıklığının herhangi bir sınır olmaksızın sonsuz farklı uzunlukta olabileceğinin farkında olma.
- ♣ Doğru üzerinde oluşturulan doğru parçasının (ikizkenar üçgenin tabanı) uç noktaları merkez olmak koşuluyla inşa edilecek çember ya da yaylar için pergel açıklığının doğru parçasının yarısından fazla olmak koşuluyla sonsuz farklı uzunlukta olabileceğinin farkında olma.

Görev 19: Yatay olmayan bir doğru inşa ederek üzerinde bir nokta belirleyin. Belirlediğiniz noktadan geçen o doğruya dik olan başka bir doğru inşa edebilir misiniz?

Görev 20: Verilen doğrulara (yatay olmayan doğrular) üzerinde belirlenen noktalardan geçen dikme inşa ediniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Yatay olmayan bir doğruya, farklı yerlerinde alınan noktalardan dikme inşa edebilme.
- ♣ İnşa sürecinde farklı ikizkenar üçgenler inşa edebildiğini gösterme, pergel açıklığı değişkenliğini yorumlayabilme, gerektiğinde doğruyu uzatabilme vb. daha esnek eylemlerin farkında olma ve matematiksel gerekçelerle savunabilme.

Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler

- ♣ İnşa edilen oluşumda herhangi bir adımı ya da elemanı ikizkenar üçgende tepe noktasından tabana inilen dikmenin tabanı iki eş parçaya bölmesi teoremi ile savunabilme.
- ♣ Doğru parçasının orta noktasını bulma oluşumunu, doğru üzerinde verilen bir noktayı orta nokta kabul eden doğru parçasını açığa çıkarma doğrultusunda yorumlayarak yansıtır.
- ♣ Tepe noktasının orta dikme üzerinde kaldığını farkında olarak orta nokta bulma oluşumunda ortaya çıkan kesişim noktalarından herhangi birisinin tepe noktası olarak alınabileceğini savunabilme.

Öğretim Deneyi

Başlangıç olası öğrenme yörüngesinin ortaya çıkarılmasının ardından bu yörüngenin, öğrenme ortamında esas alınarak uygulanması ve değerlendirilmesi öğretim deneyi aşaması olarak ele alınmaktadır. Öğretim deneyi boyunca gerçekleştirilen sürekli analiz (ongoing preliminary analysis) hem öğrenme amaçlarına ulaşma yolunda öngörülen yörüngenin revize edilmesini hem de beklenmedik durumlar karşısında hazırlıklı olunması için olası müdahalelerin zenginleştirilmesine olanak tanımaktadır. Bu amaçla her iki derslik sürecin ardından elde edilen veriler araştırmacılar tarafından incelenmiş ve öngörülen öğrenme sürecinin işlerliği ve revizyonu, karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yapılabilecek olası müdahalelerin yeterliği, yönlendirici ve sorgulayıcı soruların sınırlarının yeniden belirlenmesi gibi konularda biçimlendirici değerlendirmeler yapılmıştır. Elde edilen tüm verilerin bütüncül bir şekilde analizinin yapılması ise öğretim deneyi sonrasında gerçekleştirilmektedir.

Bu çalışmadaki öğretim deneylerinin gerçekleştirildiği öğrenme sürecinde heterojen grupların yer aldığı işbirlikli öğrenmeye dayalı ortam esas alınmıştır. Her bir öğrencinin önünde sadece pergel ve çizgeç araçları ile beyaz kâğıt konmuştur. Bu kâğıtlardan bir kısmını bireysel çalışma kâğıdı bir kısmını ise grup çalışma kâğıdı olarak kullanabilecekleri açıklanmıştır. Verilen her bir görevin gerçekleştirilmesi için öncelikle grup içi tartışmaların yapılmasına fırsat verilmiştir. Öğretmen bu sırada gruplar arasında dolaşarak hem onların eylemlerini izlemiş hem de onları sorgulamaya iten ya da keşfe yönlendiren sorular yöneltmiştir. Örneğin, *doğru parçasına eş derken ne demek istiyor sizce? Doğru parçalarının eş olması için hangi özelliğinin aynı olması gerekir? Doğru parçalarının yön veya doğrultuları hakkında ne düşünüyorsunuz?* gibi sorgulayıcı ve yönlendirici sorular ile öğrencilerin düşünme süreçlerini desteklemiştir. Ardından gerçekleştirilen gruplar arası sınıf tartışmalarında her gruptan birer öğrenci gruplarının eylemlerini, vardıkları sonuçları, çıkış noktalarını, stratejilerini nedenleriyle birlikte sınıfa aktarmışlardır. Her bir sınıf tartışması periyodunda farklı öğrencilerin söz hakkı olarak grubunu temsil etmesine dikkat edilmiştir. Ayrıca sınıf tartışmalarında sadece grubu temsil eden öğrenciler değil diğer öğrenciler de söz hakkı olarak tartışmaya dâhil olabilmişlerdir. Bireysel ve grup çalışma kâğıtlarına hem grup içi hem de gruplar arası tartışmalar sonucu varılan sonuçlar not edilmiş ve bu kâğıtlar her dersin sonunda öğretmen tarafından toplanmıştır. Ayrıca her dersin ardından benzer görevleri içeren ev ödevleri verilmiş ve yine öğretmen tarafından takibi yapılarak bu ödev kâğıtlarının geri toplanması sağlanmıştır.

Öğretim sürecinde *analiz, oluşturma, kanıt ve tartışma* aşamaları esas alınmıştır. Örneğin bir doğru parçasına eş olan başka bir doğru parçasına inşa edilmesi sürecinde ilk olarak “eş doğru parçası” talebinin ne gerektirdiği üzerine düşünülmesi ve eşit uzunlukta olma kistasının keşfedilmesinin ardından deneme yanılma yoluyla ya da göz kararı eşit uzunlukta doğru parçaları çizilmesi *analiz* adımını işaret etmektedir. Pergel ve çizgeç aracılığıyla geometrik oluşumların inşasında yasaklı bir eylem olarak görülen çizgeç üzerinde işaretleme yaparak eş doğru parçası inşa etmenin ise *analiz* adımından *oluşturma* adımına geçiş olarak yorumlanabileceği düşünülmüştür. Pergel yardımıyla düzlemde alınan bir noktadan eşi inşa edilecek olan doğru parçası kadar uzaklıkta olan olası noktaları (çember) belirleyip, bu noktalardan birisi ile merkez noktayı doğru parçası inşa edecek şekilde çizgeç yardımıyla birleştirme açıkça *oluşturma* adımını işaret etmektedir. Oluşumun inşasının ardından orijinal doğru parçası ile ortaya konan doğru parçasının eş olup olmadığının sorgulaması sürecinde ortaya konması olası görülen doğru parçalarının eşit uzunlukta olması dayanağı, pergelin açıklığının her ikisi için de aynı olduğunun gösterilmesi gibi savunmalar *kanıt* adımında ortaya konması beklenen performanslardır. Son olarak eş doğru parçasının inşasında düzlemde rastgele alınan ilk nokta (merkez nokta) sabit olmak üzere farklı eş doğru parçalarının inşasının mümkün olup olmadığı sorgulamasında çember olarak inşa edilen olası noktalardan herhangi birisinin eş doğru parçasının diğer ucu olarak alınabileceğinin gösterilmesi ve savunulması ise *tartışma* adımını işaret etmektedir.

Geriye Dönük Analiz

Öğretim deneyinden elde edilen veriler ışığında başlangıçta ileri sürülen amaçlar, varsayımlar ve etkinlikler tutarsızlık gösterebilir. Bu durumda öne sürülen öğrenme yörüngesi bu tutarsızlıklar

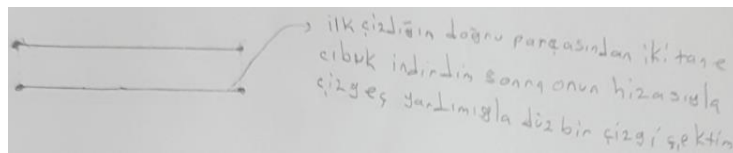
temelinde revize edilerek arındırılmalı ve sonraki çalışmalar için kullanılabilme ve geliştirilmeye hazır halde sunulmalıdır (Bakker ve Van Eerde, 2015). Geriye dönük analiz yerel bir eğitim teorisi ve yorumlayıcı bir çerçeve geliştirmeye katkı sağlamak için elde edilen tüm veri grupları üzerinde çalışmayı gerektirmektedir (Plomp, 2007). Geriye dönük analiz aşamasında sınıf olaylarının karmaşası ve dağınıklığı gibi etkenlerin anlamlandırılmasını sağlayan yorumlayıcı bir çerçeve önemli görülmektedir (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Öğrencilerin düşünme süreçlerindeki gelişimsel ilerleyişin yorumlayıcı bir çerçevede değerlendirilerek sunulduğu bu çalışmada, ulaşılan sonuçlar ile öğrenme yörüngesinin revizyonuna ilişkin kararlar alınmıştır. Örneğin başlangıç öğrenme yörüngesinde, eş doğru parçası inşa etme süreci için öğrencilerin pergel açıklığını kullanarak bu açıklık kadar uzaklığa sahip iki nokta belirleyip bu noktaları esas alarak eş doğru parçasını inşa etmesi öngörülmüştür. Öğretim deneyinde bu öngörü gerçekleşmiş ancak eş doğru parçalarını sadece birbirine paralel ve uç noktaları alt alta gelecek şekilde inşa etme şeklinde eylemlerin de ortaya konabileceği görülmüştür. Dolayısıyla bu yönde öğrenme yörüngesi revize edilmiştir.

Bulgular

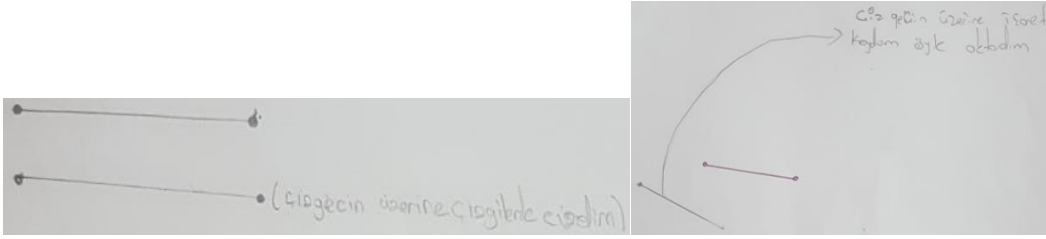
Bu bölümde, ulaşılan sonuçlar inşa edilmesi amaçlanan beş temel geometrik oluşum başlığı altında ve öğrenme yörüngesindeki güzergâh ile paralel olacak şekilde sunulacaktır. Oluşumların birbiri ile ilişkili olarak yapılandırıldığı göz önünde bulundurularak gelişimsel ilerleyişin izlenebilmesi açısından bu güzergâh önemli görülmektedir. Her başlık altında, ilk olarak öğretim deneyleri sırasında tüm katılımcılardan elde edilmiş alıntılar sunulmuş ve sınıf içi tartışmalar aktarılırken araştırmacı "öğretmen" olarak kodlanmıştır. Ardından klinik görüşmelerden alıntılar sunulmuştur ki bu alıntılar odak katılımcıların bilişsel süreçlerine ilişkindir. Klinik görüşmelerden alıntılar sunulurken araştırmacı "görüşmeci" olarak kodlanmıştır. Son olarak her bir başlık altında o oluşuma dair sunulan olası öğrenme yörüngesinin, eğer gerekli ise, revize edilmiş hali sunulmuştur.

Eş Doğru Parçası Aktarma Oluşumu

Verilen bir doğru parçasına eş olan başka bir doğru parçası inşa edilmesi görevi ile karşılaşan öğrencilerin öncelikle "yani aynısı mı?", "eş derken bir tane daha mı bundan çizelim?" gibi eşliği anlamlandırma yönünde sorgulamalar gerçekleştirdikleri görülmüştür. Analiz aşaması olarak görülen bu süreçte verilen görevin doğru parçasını düzlemde başka bir yere aktarma anlamına da geldiğine vurgu yapan öğretmen, "eşlik" ifadesinden ne anladıklarını grup içinde tartışmalarını istemiş ve her gruptan "birebir aynısı olma" cevabını almıştır. Bunun üzerine eş doğru parçası inşa etme oluşumunu gerçekleştirmeleri için süre verilmiştir. Öğrencilerin birçoğunun çizgeç yardımıyla göz kararı doğru parçasına paralel ve yine göz kararı başlangıç ve bitiş noktaları alt alta olacak şekilde bir doğru parçası inşa ettikleri görülmüştür. Şekil 2'de bu yönde oluşumu gerçekleştiren bir öğrencinin "ilk çizdiğim doğru parçasından iki tane çubuk indirdim. Sonra onun hizasında çizgeç yardımıyla düz bir çizgi çektim" açıklaması görülmektedir. Benzer bir oluşumu pergel kullanmaksızın sadece çizgeç üzerinde işaretleme yaparak eş doğru parçasını inşa eden öğrenciler de görülürken, bazılarının ise farklı yön ve doğrultuda eş doğru parçası inşa ederek daha dinamik oluşumlar gerçekleştirme yoluna girdikleri görülmüştür. Bu yönde oluşum gerçekleştiren öğrencilerin bireysel çalışma kâğıtlarından alıntılar sunulan Şekil 3'te "çizgecin üzerine çizgilerle çizdim" ve "çizgeç üzerinde işaret koydum ve öyle aktardım" açıklamaları görülmektedir. Bu sürecin eş doğru parçası için gerekli görülen eşit uzunluk koşulunun anlamlandırılması ve uygulamasının göz kararı veya yasaklı eylemlerle yapılmasından ötürü oluşum aşaması olarak görülmesinin uygun olmadığı, analiz aşamasından oluşum aşamasına geçiş olarak değerlendirilmesinin doğru olacağı düşünülmektedir.

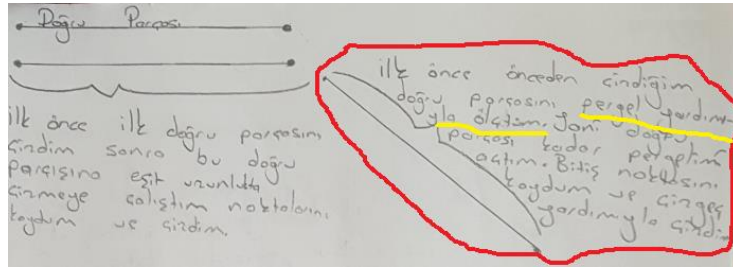


Şekil 2. Göz Kararı Başlangıç ve Bitiş Noktaları Alt Alta Gelecek Şekilde Eş Doğru Parçası İnşası



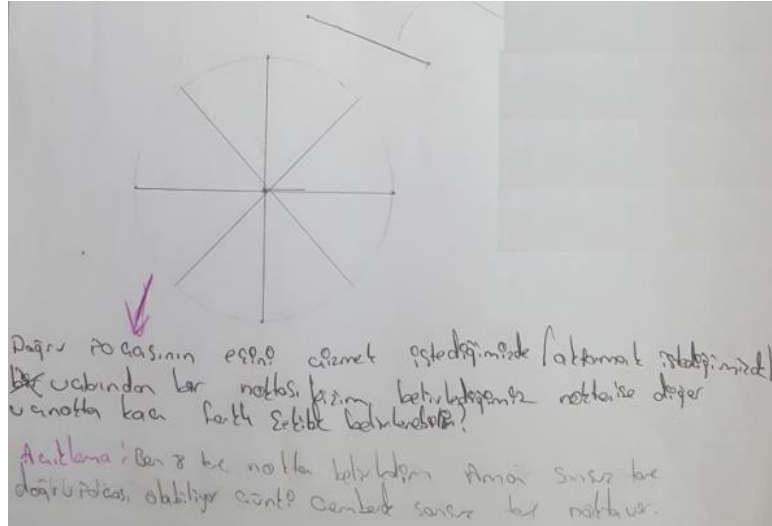
Şekil 3. Çizgeç Üzerinde İşaretleme Yapılarak Başlangıç ve Bitiş Noktaları Alt Alta Gelecek Şekilde Eş Doğru Parçasının İnşası (Solda) ile Farklı Yön ve Doğrultuda Eş Doğru Parçası İnşası (Sağda)

Pergel ve çizgeç yardımıyla gerçekleştirilen oluşumlarda yasak olan çizgeç üzerinde işaretleme yapma eylemine dikkat çekilmesinin ardından sınıftan bir öğrencinin "ben zaten pergel ile yaptım. Doğru parçası kadar açtım ve onunla belirledim noktaları" açıklaması, diğer öğrenciler için anlamlı ve kabul edilebilir bulunmuştur. Bazı öğrencilerin farklı yön ve doğrultularda pergel yardımıyla eş doğru parçası inşa edebildikleri görülmüştür (Şekil 4). Ancak henüz bu aşamada olası noktalar belirlemek yerine sadece pergel açıklığına sağlayan iki nokta belirleyerek eş doğru parçası inşası gerçekleştirilebilmiştir. Kanıt aşaması olarak kabul edilebilecek bir sorgulama olan "neden eş olduğunu düşünüyorsunuz bu doğru parçalarının?" sorusu ile öğrencilerin pergeli bir ölçme aracı gibi kullanmaya başladıkları görülmüştür. Şekil 4'te bir öğrencinin "ilk önce önceden çizdiğim doğru parçasını pergel yardımıyla ölçtüm. Yani doğru parçası kadar pergelimi açtım. Bitiş noktasını koydum ve çizgeç yardımıyla çizdim" açıklaması görülmektedir.



Şekil 4. Eş Doğru Parçasının Farklı Yön ve Doğrultuda Pergel Kullanılarak İnşası ve Pergelin Bir Ölçüm Aracı Olarak Görülmeye Başlaması

Her ne kadar farklı yön ve doğrultuda eş doğru parçalarının inşa edilebileceği dinamik bir düşünmeyi işaret etse de olası noktaları belirleyerek oluşumun gerçekleştirilmemesi henüz tam olarak dinamikleşen düşüncenin ortaya çıkmadığını düşündürmektedir. Öğrencilerin bu yönde sıçrayış gerçekleştirebilmeleri için onlara sırasıyla oluşum ve tartışma aşamalarını gerektirecek olan görev 2 (verilen doğru parçasını, uç noktalarından biri A noktası olacak şekilde aktarın) ve görev 3 (uç noktalarından biri A noktası olmak koşuluyla, verilen doğru parçasına eş olarak inşa edilebilecek olası doğru parçalarını gösterin. A noktası sabit kalmak şartıyla eş doğru parçasını sağlayan diğer uç nokta için olası noktaları gösterin) yöneltilmiştir. Bu görevlerle birlikte öğrencilerin pergel yardımıyla çember inşa ederek olası noktaların sonsuz tane olduğunu gösterebildiği ve ardından sonsuz eş doğru parçası inşa edilebileceğini savunabildiği görülmüştür (Şekil 5). Aynı zamanda kanıt aşamasını işaret eden bu süreçte öğrencilere, "başka doğru parçası var mı buna eş olan?, nerede diğer eş doğru parçaları?, çember üzerindeki bu noktaların özelliği ne?, kaç tane eş doğru parçası çizilebilir?, neden böyle düşünüyorsun?, gösterebilir misin?" gibi sorular yöneltilerek eş doğru parçalarından bir kısmını göstererek gerekçeli savunma yapmaları için teşvik edilmişlerdir. Şekil 5'te bir öğrencinin "ben 8 tane nokta belirledim ama sonsuz tane doğru parçası olabiliyor çünkü çemberde sonsuz nokta var" savunması görülmektedir.



Şekil 5. Eş Doğru Parçası Oluşumunun Pergel Kullanılarak Eşliği Sağlayan Olası Noktaları Belirleme Koşuluyla İnşası ve Savunulması

Odak katılımcılar ile gerçekleştirilen birebir görüşmelerde Emre, ilk andan itibaren bir doğru parçasına eş başka bir doğru parçası inşa etme sürecinde, düzlemde aldığı herhangi noktayı eş doğru parçası için sabit bir uç nokta kabul ederek diğer uç nokta için olası tüm noktaların bir çember oluşturduğunun ve hatta olası noktaların bir kısmı olan yay inşasının da yeterli olacağına farkında olduğunu göstermiştir. Olası noktaların tümünü içeren çember inşasının ilerleyen zamanlarda olası noktaların yeterli görünen bir kısmı olan yay inşasına evrilebileceği öngörüldüğünde henüz bu anda yay inşasını gerçekleştirmeye başlaması bu katılımcının gelişimsel ilerleyişi açısından önemlidir. Eşliği “kopyala-yapıştır ve aynı olma” ifadeleriyle savunabilen bu katılımcı henüz bu aşamada neden yay inşa ettiğini olası noktaları belirleme gibi dinamikleşen düşünme sürecini işaret eden bir gerekçe ile savunamamıştır. Aşağıda Emre ile gerçekleştirilen görüşmede eş doğru parçası inşasının sorgulanması sırasında yapmış olduğu açıklamalara ilişkin alıntılar sunulmuştur.

Görüşmeci: Şu anda ne yapmış oldun sen?

Emre: Bunun aynısını buraya kes-yapıştır gibi yapmış oldum.

Görüşmeci: Kaç tane doğru parçası çizebilirsin peki eş olan?

Emre: Sonsuz tane. Ama çember çizmem lazım (çizdiği yayı çembere tamamlamaktan bahsediyor).

Görüşmeci: Peki neden sonsuz tane eş doğru parçası çizebileceğini düşünüyorsun?

Emre: Çünkü çemberi sonsuz tane nokta oluşturduğu için ve merkez nokta ile çemberi oluşturan noktaya koyarak doğru parçası çizdiğimiz için merkez noktadan da buralara sonsuz tane doğru parçası vardır

Ceylan ve Salim’in ise görüşmenin başlangıcında eş doğru parçasını pergeli yardımıyla ancak olası noktaları belirlemeksizin sadece tek nokta belirleyerek inşa ettikleri görülmüştür. Fakat kaç adet eş doğru inşa edebilecekleri ve eş doğru parçasının düzlemde bir uç noktasının sabit olması şartıyla diğer uç noktasının kaç tane olabileceği sorgulamaları ile kolayca sonsuz eş doğru parçasının inşa edilebileceğini savunabildikleri görülmüştür. Bu sırada çember üzerindeki sonsuz noktanın varlığını matematiksel bir dayanak olarak ileri sürebildikleri dikkat çekmiştir. Sonuç olarak bu katılımcıların da eş doğru parçasının inşasını gerçekleştirmelerinin yanı sıra kanıt ve tartışma aşamalarında açıkça dinamikleşen düşünme süreçleri ile matematiksel gerekçeler öne sürerek varlık gösterebildikleri görülmüştür. Aşağıda Ceylan’ın çember üzerindeki sonsuz nokta varlığını dayanak göstererek sonsuz eş doğru parçası inşa edilebileceğine dair açıklamaları sunulmuştur.

Görüşmeci: Kaç tane bu doğru parçalarından elde edebilirsin?

Ceylan: Sonsuz. Bu çemberin içinde sonsuz tane olur.

Görüşmeci: Neden sonsuz tane çizebileceğini düşünüyorsun?

Ceylan: Çünkü çember üzerinde sonsuz tane nokta var. Hepsi de merkez noktaya gittiği için sonsuz tane çizebilirim.

Görüşmenin başlangıcında eş doğru parçası oluşumunu pergeli yardımıyla ancak yine olası noktaları belirlemeden sadece tek nokta belirlemeye dayalı inşa edebilen İlkan ise her ne kadar çember üzerinde sonsuz nokta olmasını dayanak göstererek sonsuz eş doğru parçası inşa edebileceğini savunabilse de matematiksel gerekçelerini öne sürmekte zorlanmıştır. Öyle ki bu katılımcı çember üzerindeki sonsuz noktanın yanı sıra doğru parçası üzerindeki sonsuz noktayı da bir dayanak olarak ileri sürmüştür. Ayrıca görüşme sırasında eş doğru parçası inşa ederken eşkenar üçgen inşa etme veya orta nokta bulma gibi oluşumlara ait adımları gerçekleştirme yönünde karışıklıklar yaşadığı görülmüştür. Nitekim ilk görüşmeler ilk üç amaca yönelik öğretim deneyleri sonrasında gerçekleştirilmiş ve öğrenciler bu oluşumları gerçekleştirmeye yönelik öğretim sürecinde bulunmuşlardır. Ancak hangi oluşumda hangi adımın atılacağına dair kargaşa daha çok bir takım algoritma ya da işlemlerin ezbere uygulandığı yorumunu güçlendirmekte bu da durağan düşünme yollarını işaret etmektedir. Bu sebeple bu katılımcının bu oluşumda dinamikleşen düşünme sürecinin olumlu yönde ilerlediğini gösteren eylemler olsa da henüz istenilen noktada olmadığı düşünülmektedir. Aşağıda sunulan alıntıda İlkan'ın sonsuz tane eş doğru parçası inşa edebileceğini dile getirmesine rağmen bu görüşünü savunurken doğru parçasının da sonsuz noktaya sahip olması gerekçesini sunduğu görülmektedir.

Görüşmeci: Başka kaç tane eş doğru parçası çizebilirsin?

İlkan: Sonsuz tane çizerim. Bunların hepsi yarıçap hocam (çember üzerinde başka bir noktayı merkez nokta ile birleştirdi çizgeç yardımıyla).

Görüşmeci: Neden?

İlkan: Biz demiştik daha önceden de çemberde sonsuz tane nokta vardır diye. Doğru parçasında da sonsuz tane nokta olduğunu biliyoruz. Sonsuz tane olduğu için sonsuz tane çizebiliriz.

Sonuç olarak odak katılımcılarda da öğretim deneyinde görülen olası noktaları belirleyerek eş doğru parçasının inşası ve matematiksel gerekçeli savunmalar yapılarak dinamikleşen düşünme süreçlerine doğru gelişim açıkça görülmüştür. Eş doğru parçası inşasında bazı öğrencilerin sadece verilen doğru parçasına paralel ve hatta uç noktaları alt alta ya da yan yana olacak şekilde bir eş doğru parçası oluşturabileceği gibi daha durağan bir düşünme süreci ortaya koyabileceği görülmüş ve öğrenme yörüngesinin bu doğrultuda revize edilmesine karar verilmiştir. Öğrenme yörüngesine eklenmesi gerekli görülen bir diğer kritik eylem ise öğrencilerin farklı yön ve doğrultularda eş doğru parçaları inşa edebilmeleri gerekliliğidir. Aşağıda eş doğru parçası inşasına ilişkin ortaya konan öğrenme yörüngesinin revize edilmiş kısmı kırmızı renkle yazılarak sunulmuştur.

Revize Edilmiş Varsayımsal Öğrenme Yörüngesi

Öğrenme Amacı 1: Pergel ve çizgeç yardımıyla eş doğru parçası inşa eder.

Görev 1: Verilen doğru parçasına eş bir doğru parçası çizin-Bir doğru parçası inşa ederek düzlemde herhangi bir yere bu doğru parçasını aktarın.

Öngörülen Öğrenme Süreci

♣ Pergel açıklığını kullanarak bu açıklık kadar uzaklığa sahip iki nokta belirleme ve bu noktalar arasındaki doğru parçasını inşa etme.

- ♦ Pergeli doğru parçası kadar açarak eşit uzunluğu aktarma ve doğru parçaları paralel olup uç noktaları alt alta gelecek şekilde eş doğru parçası inşa etme.

- ◆ Pergeli doğru parçası kadar açarak eşit uzunluğu aktarma ve farklı yön ve doğrultularda eş doğru parçaları inşa etme.

Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler

- ♣ İnşa edeceği eş doğru parçasının farklı yön ve doğrultularda olacağını farkında olur.
- ♣ Bir noktadan belirlenen bir uzunluk kadar uzaklıkta olan olası noktaları çember inşası ile **ya da belirli bir kısmını yeterli görerek yay ile** açığa çıkarabilir.

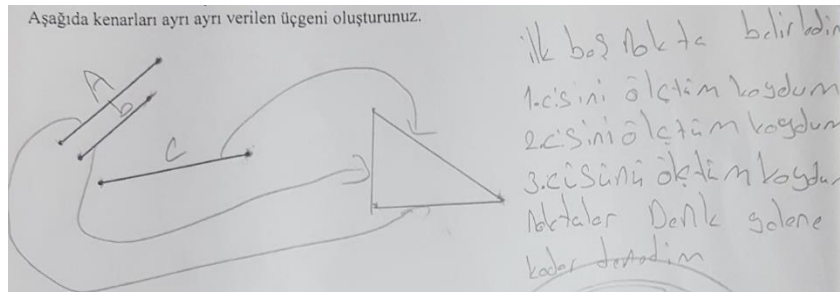
Üç Kenarı Verilen Üçgenin İnşa Edilmesi Oluşumu

İkinci öğretim deneyi olan derse bir üçgenin kenarları olarak kabul edilecek üç doğru parçası sunularak istenilen üçgenin inşa edilmesi görevini içeren etkinlik ile giriş yapılmıştır. Bu oluşumda talep edilen sürecin anlamlandırılmasında beklenildiği gibi zorlanılmadığı görülmüştür. Analiz aşaması olarak görülebilecek bu kısa sürecin ardından öğrenciler oluşumun gerçekleştirilmesi yönünde aktiviteler için işe koyulmuşlardır. İlk olarak sunulan doğru parçalarının aktarılması gerektiğini fark eden öğrencilerin bireysel çalışma kâğıtları da incelendiğinde deneme yanılma yolu ile doğru parçalarını uç uca birleştirecek şekilde aktarmalar yapmaya çalıştıkları görülmüştür. Öğrencilerin çoğunluğu pergel yardımıyla ancak olası noktaları belirlemek yerine tek noktaya dayalı aktarımlar yapmaya çalışmıştır. Buna örnek olarak sunulan Şekil 6'da "önce bir nokta belirledim. Ardından birinci doğru parçasını ölçtüm (pergeli onun kadar açmaktan bahsediyor) ve koydum (aktardım demek istiyor). İkinci ve üçüncü doğru parçalarını da ölçtüm ve koydum. Noktalar (uç noktalar) denk gelene kadar denedim" açıklaması görülmektedir. Bazı öğrenciler ise pergel kullanmadan hala sadece çizgeç yardımıyla doğru parçalarını aktararak istenilen üçgeni inşa etmeye çalışmıştır. Aşağıda oluşumu bu şekilde gerçekleştiren bir öğrencinin gruplar arası sınıf tartışmalarındaki açıklaması sunulmuştur.

Öğretmen: Nasıl yaptın?

İlkan: Önce bu doğru parçasını aktardım, sonra diğerini. En son şunu da oraya denk gelecek şekilde aktardım oldu. Çizgeç yardımıyla pergelsiz.

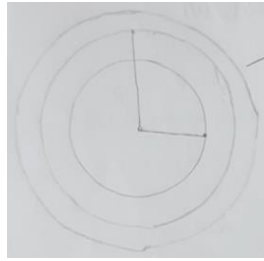
Diğer öğrenciler: Ama yasak öyle çizgeç üzerinde işaret almak.



Şekil 6. Pergel Kullanımı ile Tek Noktaya Dayalı Aktarımlar Yaparak Deneme Yanılma Yoluyla Üç Kenarı Verilen Üçgen İnşası

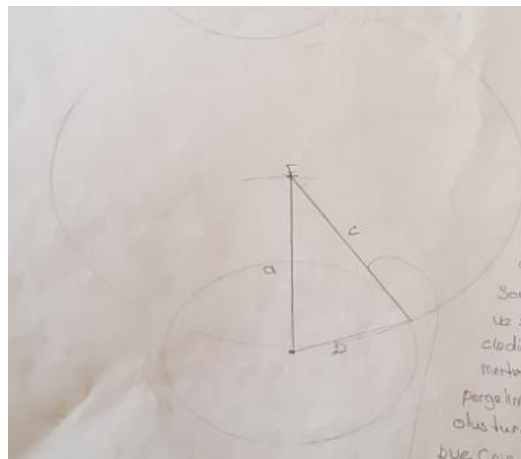
Öğrencilerin kendilerinin kabul edilebilir bir çıkış yolu bulmakta çok zorlandıkları görülmüş ve bu sebeple onları olası noktaları belirleyerek doğru parçalarını aktarmaya yönlendirmek için öğretmen tarafından "siz bir tane nokta koyup o noktanın doğru parçalarını eş yapıp yapmadığına bakmaya çalışıyorsunuz. Oysaki siz doğru parçanızı aktarırken eş olmasını sağlayan tüm noktaları koysanız aradığımız nokta belki de açığa çıkacaktır" uyarısı ile bir öğrencinin "haa bir sürü nokta bulacağız" diğerinin ise "çember ile yapacağız" dediği görülmüştür. Ancak öğrencilerin üçgenin kenarı olan ilk doğru parçasını aktardıktan sonra pergelin nereye konması gerektiği konusunda zorluk yaşadıkları, çember çizilmesi gerektiğinin de farkında olmadıkları görülmüştür. Analiz süreci olarak görülebilecek bu süreçte dikkat çekici olan olumsuz durum öğrencilerin tek noktaya dayalı aktarım yaparken ortaya koydukları "ilk önce bir doğru parçasını aktar. Ardından bu doğru parçalarının uç noktalarını esas alarak diğer doğru parçalarını aktar ancak öyle aktarmalıyım ki bu iki doğru parçası üçüncü köşe olacak şekilde uç uca kesişsin" stratejisini olası noktaları belirleyerek doğru parçalarını aktarma sürecine yansıtamamalarıdır. Öğrencilerin ilk

aktardıkları doğru parçasının bir ucuna istenilen bir doğru parçasını ve diğer ucuna da öteki doğru parçasını aktarması gerektiği yönünde akıl yürütememesi dikkat çekmiştir. Bazı öğrencilerin aynı uç noktaya iki doğru parçasını da aktardıkları görülmüştür (Şekil 7).



Şekil 7. Üç Kenarı Verilen Bir Üçgenin İnşa Edilmesinde, Aktarılan İlk Doğru Parçasının Bir Ucuna Diğer İki Doğru Parçasının Da Aktarılması Yönünde Olası Noktaları Belirlenmesi

Bunun üzerine öğretmen tarafından tahta üzerinde “bu doğru parçası sizin üçgeninizin bir kenarı değil mi?, Peki o zaman üçgeninizin köşeleri belli mi şu anda?, Kaç köşesi belli?, İki köşe belliyse bizim üçüncü köşeyi bulmamız gerekir. Ama bu üçüncü köşedeki nokta hem bu doğru parçasını hem de bu doğru parçasını kenar olarak sağlamalı” gibi yönlendirici-sorgulayıcı soru ve ipuçları yönelmiştir. Bu sırada odak katılımcılardan Emre ve Ceylan bu muhakemeyi çabuk yürüten iki öğrenci olmuş ve istenen oluşumu gerçekleştirebilmiştir. Dikkat çekici diğer bir nokta ise Emre’nin sonsuz sayıdaki olası noktaların gerekli gördüğü kadarlık bir kısmı olan yay yardımıyla oluşumu gerçekleştirmesi olmuştur ki bu da onun dinamikleşen düşünce yapısına işaret etmektedir (Şekil 8).

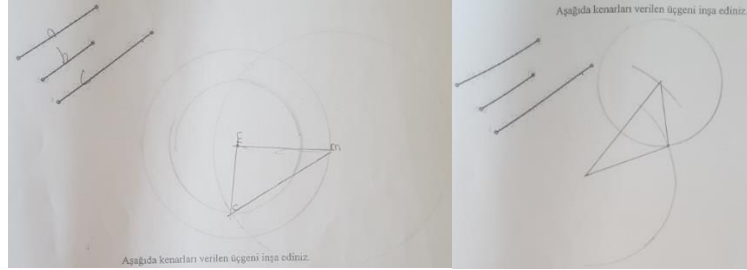


Şekil 8. Üçgenin Kenarları Olarak Kabul Edilen Doğru Parçalarından İlk Olarak Bir Tanesi Aktarılırken Olası Noktaları Yay Yardımıyla Belirlemeyi Yeterli Gören Bir Katılımcı

Grup içi ve gruplar arası tartışmalar ile diğer öğrencilerin ilk aktardıkları doğru parçasının uç noktalarına diğer doğru parçalarını olası noktaları belirleyerek aktarmaları gerektiğini fark ettikleri görülmüştür. Ardından kesişim noktasını üçüncü köşe olarak kabul edeceklerini anlamaları zor olmamıştır. Kanıt aşaması olarak görülen kesişim noktasını kritik yapan özelliğinin sorgulanması sürecinde büyük çoğunluğun kesişim noktasının istenilen doğru parçalarını sağlayan nokta olduğunu vurgulayabildiği görülürken, bu öğrencilerden Ceylan’ın daha da ileri giderek “üçgenin üçüncü köşesi çemberlerin kesişim noktasıdır. Eğer başka bir yere üçüncü köşeyi koysaydık c aynı kalır, b’nin boyu uzardı (ilk aktarılan kenarın ardından o kenarın uç noktalarına aktarılan diğer kenarlardan birisine eş olsa bile diğerine olmaz diyor)” şeklinde aksi bir örnek durum üzerinden gerekçelendirme yaparak savunma yapması dikkat çekmiştir. Ardından atılan adımların tartışıldığı ve oluşumu sağlayan farklı durumların varlığının sorgulandığı süreçte üçüncü köşeyi veren çember kesişiminin iki tane olduğu fark edilmiştir. Kanıt süreci ile tartışma aşamalarının iç içe geçtiği bu süreçte her iki noktanın da istenilen üçgeni sağlayacağı herkesçe kabul edilmiştir. Devamında ilk olarak aktarılan doğrunun yön ve doğrultusuna göre inşa

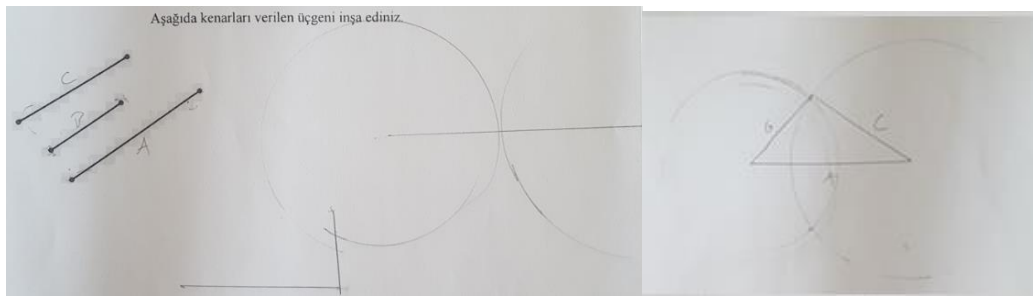
edilen üçgenin yön ve doğrultusunun da farklılaşabileceği ancak aynı üçgen olduğu herkesçe benimsenmiştir.

Odak katılımcılarla gerçekleştirilen birebir görüşmelerde Emre, Ceylan ve Salim verilen tüm doğru parçalarını aktarırken olası noktaların tamamını çember olarak ya da yeterli görülen bir kısmını yay olarak açığa çıkararak istenilen üçgeni inşa edebildiklerini göstermiştir (Şekil 9).



Şekil 9. Emre ve Salim'in Her Adımda Olası Noktaları Belirleyerek Üç Kenarı Verilen Üçgeni İnşası

İlkan'ın ise başlangıçta ilk doğru parçasını pergelle tek nokta ortaya koyarak aktarabildiği, ardından aktarılan doğru parçasının uç noktalarına diğer doğru parçalarını aktarmakta başarısız eylemler ortaya koyduğu görülmüştür. Devamında diğer doğru parçaları uç uca kesişecek şekilde deneyerek aktarmak için izin istemiş ancak bu yönde izin verilmeyince sorgulamalar sırasında muhtemelen hatırlamış olacak ki istenilen üçgeni ilk doğru parçasını tek nokta ortaya koyarak diğerlerini ise olası noktaları belirleyerek inşa edebilmiştir (Şekil 10).



Şekil 10: İlkan'ın Üç Kenarı Verilen Üçgeni İnşa Etmede Başarısız Eylemleri (Solda) ve Ardından İlk Doğru Parçası İçin Tek Nokta Diğerleri İçin Olası Noktaları Belirleyerek Üç Kenarı Verilen Üçgeni İnşası (Sağda)

Ancak İlkan'ın neden çember inşa ettiği sorgulamasında “deneme yolu ile olmasın diye” ve ayrıca neden kesişim noktalarını belirginleştirdiği sorgulamasında ise “Şimdi sınıfta deneye deneye yapmıştık olmamıştı. Sonra Salim çember çizdi onun içine yaptı. Emre de çember çizerek kesişim noktasını buldu. Biz de ondan görerek böyle yapmayı öğrendik” savunması ile matematiksel olmayan bir gerekçe sunması onun daha çok algoritmik adımlar takip ettiği ve dinamikleşen düşünme sürecinin henüz sağlam temellere oturmadığı yorumunu güçlendirmiştir. Oysaki diğer odak katılımcılar “kesişim noktası yerine çember üzerindeki başka bir noktayı alsaydık üçgenin bir kenarını sağlar ancak diğerini sağlamazdı. Bu kesişim noktasının özelliği her iki doğru parçasını da sağlayan nokta olmasıdır” savunmasını yapabildiğini göstererek daha matematiksel bir gerekçe sunmuşlardır ki bu da onların olası noktaları belirleyip kesişimde yer alan bazı kritik noktaların oluşumu sağlama özelliğini göz önüne alarak adımlar attıklarını işaret etmektedir.

Sonuç olarak üç kenarı verilen bir üçgenin inşasında, ilk olarak herhangi bir doğru parçasını üçgenin inşa edilmesi hedeflenen bir yere aktarırken pergelle yardımıyla ancak tek nokta koyarak aktarım yapma ve çember ya da yay inşası ile olası noktaları belirleyerek aktarım yapma eylemleri ortaya çıkmıştır. Ayrıca diğer doğru parçalarının aktarımında da çember yerine yay tercih edilerek olası noktaların yeterli görülen bir kısmından yararlanılabileceği de görülmüştür. Bunun yanında dinamik düşünmenin önemli göstergelerinden kabul edilebilecek bir diğer eylem ise inşa edilen üçgenin ilk

aktarılan doğru parçasına göre farklı yön ve doğrultularda olabileceğinin fark edilmesidir. Elde edilen bu sonuçlar doğrultusunda öne sürülen öğrenme yörüngesinin revize edilmesi gerekli görülen ilgili kısımları kırmızı renkli olarak aşağıda sunulmuştur.

Revize Edilmiş Varsayımsal Öğrenme Yörüngesi

Öğrenme Amacı 2: Üç kenarı verilen üçgeni pergel ve çizgeç yardımıyla inşa eder.

Görev 4: Verilen üç doğru parçası bir üçgenin kenarlarıdır. Bu üçgeni inşa ediniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Herhangi bir doğru parçasını düzlemde üçgen inşasını gerçekleştireceği yere aktarma.
 - ♦ Doğru parçası kadar uzunlukta olan pergel açıklığı ile sadece iki nokta belirleyerek aktarım yapma.
 - ♦ Doğru parçası kadar uzunlukta olan pergel açıklığı ile bir uç nokta sabit iken diğer uç nokta için olası noktaların tümünü (çember) ya da yeterli gördüğü bir kısmını (yay) belirleyerek aktarım yapma.
- ♣ İlk olarak aktarılan doğru parçasının uç noktalarına verilen diğer doğru parçalarını aktarma.
 - ♦ İlk olarak aktarılan doğru parçasının uç noktalarına ayrı ayrı diğer doğru parçaları kadar uzaklıktaki olası noktaların tümünü çember olarak ya da yeterli gördüğü bir kısmını yay olarak pergel yardımıyla belirleme.

Görev 5: (görev 4' ün devamı olarak) Üçgenin üçüncü köşesini buldunuz. Üçüncü köşe olabilecek başka nokta var mı? Varsa gösteriniz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

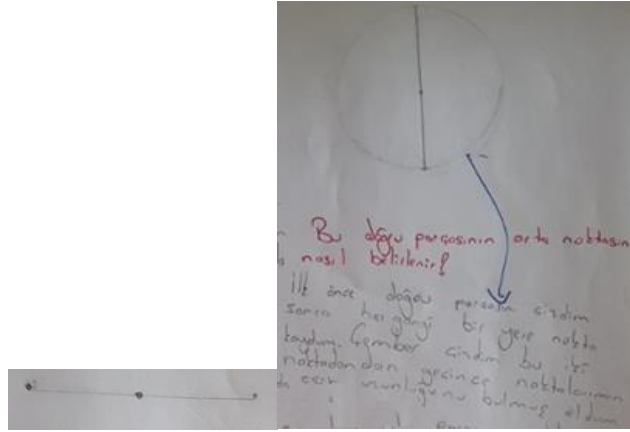
- ♣ İlk olarak aktarılan doğru parçasının uç noktalarına diğer doğru parçalarını aktarmak için inşa edilen olası noktaları içeren çemberlerin ya da yayların kesişim noktasının ilk aktarılan doğru parçasına göre simetrik olacak şekilde iki tane olduğunun farkında olma.
- ♣ İlk olarak aktarılan doğru parçasının aktarım sonundaki yön ve doğrultusuna göre inşa edilen üçgenin yön ve doğrultusunun da farklılaşabileceğini görme.

Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler

- ♣ Olası noktaların yeterli gördüğü kısmını yay olarak belirleyebileceğini fark eder ki bu sayede oluşum için kritik olmayan kesişim noktalarının ortaya çıkmasını önleyerek karışıklık yaratmasına engel olma yolunda önemli bir adım atmış olur.
- ♣ Oluşumu sağlayan kritik kesişim noktalarının birden fazla olabileceğini görür ve sonraki oluşumlar için bu olasılığı hep göz önünde bulundurur.

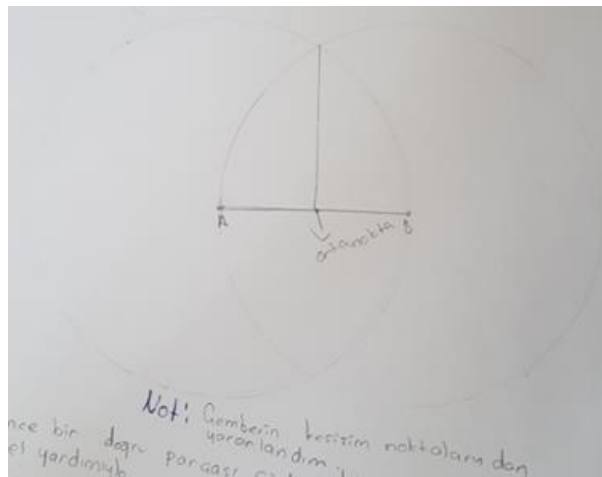
Bir Doğru Parçasının Orta Noktası Bulma Oluşumu

Verilen bir doğru parçasının orta noktasını bulma görevi ile başlayan öğrenme sürecinde öncelikle tüm grupların talep edilen oluşumu anlamlandırma çalışmaları görülmüştür. Doğru parçasının bir noktalar kümesi olduğunun bilincinde olan öğrenciler, orta noktanın ortada kalan nokta olduğunu fark etmişlerdir. Bazı öğrencilerin öğretmene orta nokta talebinden anladıklarını aktarma ve onaylatma gereği duymaksızın inşa etme sürecine giriştikleri dikkat çekmiştir. Bu sırada göz kararı orta noktayı belirleyen öğrenciler var olup bunun yanında pergel yardımıyla yapılan “pergeli öyle bir yere koyup açıklığı öyle ayarlamalıyım ki uç noktalara teğet geçen bir çember çizilebilir. İşte pergelin sivri ucunun bulunduğu diğer bir deyişle merkez nokta bu doğru parçasının orta noktasıdır” fikrini geliştiren öğrenciler de dikkat çekmiştir (Şekil 11). Şekil 11’de soldaki görselde göz kararı orta nokta belirleyen bir öğrencinin çalışma kâğıdından bir görüntü görülmekte iken sağdaki görselde ise öğrencinin “ilk önce doğru parçası çizdim. Sonra herhangi bir yere nokta koydum. Çember çizdim (o nokta merkezli çemberden bahsediyor). Noktalardan geçince (doğru parçasının uç noktalarından demek istiyor) eşit uzaklığı bulmuş oldum” açıklaması görülmektedir.



Şekil 11. Doğru Parçasının Orta Noktasının Göz Kararı Belirlenmesi (Solda) ile Orta Nokta İnşasında O Nokta Merkezli Çemberin Uç Noktalara Teğet Geçmesi Aracılığının Kullanılması

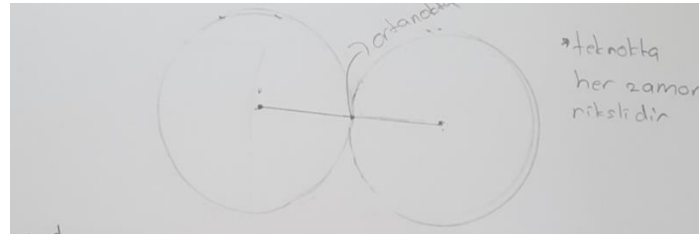
Öğretmen her iki stratejiyi de sınıf tartışmalarına taşımıştır. Deneme yanılma ya da göz kararı nokta almanın kabul edilemez olduğu herkesçe kabul edilmiştir. Ardından öğretmen, doğru parçası üzerinde rastgele bir noktanın belirlenerek onun orta nokta olduğunun pergeli yardımıyla kanıtlanmasının, deneme yanılma ya da göz kararı nokta belirlemeyi işaret ettiğini vurgulamıştır. Öğretmen “orta noktanın özelliği nedir?”, “doğru parçası üzerinde bir sürü nokta var ama orta noktanın bir özelliği var diğerlerinden farklı olarak. O özellik size çıkış yolu gösterecek” yönlendirmeleri ile onları istenilen oluşumun kritik yönlerini anlamlandırmaları için desteklemiştir. Bu sırada sınıf tartışmalarında “her iki uca da eşit uzaklıkta” cevabı ile orta noktanın kritik özelliğinin fark edilebildiği görülmüştür. Analiz aşaması olarak görülen bu süreçlerin ardından ilk olarak Ceylan pergeli doğru parçası kadar açıp doğru parçası uçlarını merkez kabul eden çemberleri çizmiş ve çemberlerin kesişim noktalarından yararlanarak orta noktayı bulmuştur. Açıkça oluşum aşaması olarak görülebilecek bu süreçte her ne kadar bu öğrenci kesişim noktalarından birini dikkate almış gibi görünse de sözlü ve yazılı açıklamasında iki kesişim noktasından geçen doğru parçasını esas aldığı görünmektedir (Şekil 12). Gerçekleştirilen oluşumun sorgulandığı bu süreç ise kanıt aşamasına kısmen geçiş olarak görülebilir ancak mutlak geçişin bu kesişim noktalarının neden kritik olduğu gibi oluşumdaki adımların sorgulandığı süreçte olması beklenmektedir.



Şekil 12. Pergelin Doğru Parçası Kadar Açılarak Orta Noktanın Bulunabilmesi

Sınıf tartışmalarında bulunan kesişim noktalarını kritik yapan özelliğın sorgulanması ile öğrencilerin bir kısmının pergeli yalnızca doğru parçası kadar açmak koşuluyla orta nokta oluşumunu gerçekleştirdikleri görülmüştür. Dikkat çeken diğer bir nokta ise birçok öğrencinin orta noktanın doğru

parçası uçlarına eşit uzaklıkta olması gerektiğini anladıkları ve bununla birlikte orta noktayı belirlemek için uç noktaları merkez kabul eden çemberleri teğet olacak şekilde inşa etme çalışmaları olmuştur (Şekil 13).



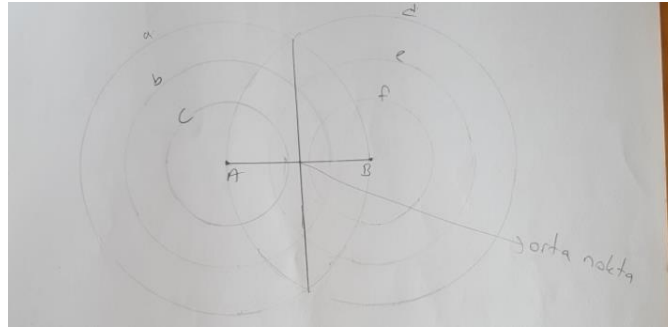
Şekil 13. Doğru Parçasının Uç Noktaları Merkezli Çemberler Teğet Olacak Şekilde Orta Noktanın Bulunması

Tek noktayı ortaya çıkaran bu oluşumun doğruluğunun şüpheli kabul edildiği vurgusunu yapan öğretmen her iki uca eşit uzaklıkta daha fazla noktanın bulunup bulunamayacağı sorgulamasını başlatmıştır. Bu süreçte yine pergelin açıklığını doğru parçası kadar açma koşuluyla orta nokta bulma oluşumu ön plana çıkmıştır. Ancak orta noktayı bu şekilde bulma süreci, sadece doğru parçası kadar pergeli açabilme, dolayısıyla uç noktalara uzaklığın sadece doğru parçası kadar olabileceği, orta dikme üzerinde sadece iki ya da üç noktanın varlığı gibi kısıtlamalar getirmekte olduğundan henüz tam anlamıyla dinamik bir düşünme sürecini işaret etmemektedir. Bu sebeple tüm sınıfa çemberlerin kesişim noktaları ve doğru parçalarının kesişimi olan orta noktanın ve kısaca orta dikme üzerinde yer alan noktaların ortak özelliğinin ne olduğu sorularak yeni bir düşünme ve tartışma süreci başlatılmıştır. Bunun üzerine başlangıçta en basit şekilde “kesişim noktalarını sağlar”, “orta noktayı bulmaya yarar” cevapları gelmiştir. İlerleyen zamanda pergelin açıklığının değiştirilip değiştirilemeyeceği, sadece doğru parçası kadar mı açılacağı sorgulaması ile doğru parçasının uzunluğundan farklı bir uzunlukta açılıp açılmayacağı yönünde tartışma genişletilmiştir. Tartışma aşaması olarak kabul edilebilecek bu süreçte pergelin farklı açıklıklarda alındığında da orta noktanın bulunabildiğinin fark edildiği görülmüştür. Aşağıda aynı zamanda odak katılımcı olan Emre'nin pergelin farklı açıklıklarda olabileceğine yönelik savunmasını içeren sınıf tartışmalarından bir alıntı yer almaktadır.

Öğretmen: Peki bir doğru parçasının orta noktası bulunurken doğru parçası kadar mı açılabilir pergel?

Emre: Hayır. Herhangi bir açıklıkta pergeli açıp bir bu uçtan bir diğer uçtan çember çizeriz. İkisinin kesişim noktalarını bulup çizgi çiziyoruz İlk doğru parçası ile nerede birleştiyse orası zaten orta nokta oluyor.

Ardından öğrencilere aynı doğru parçası üzerinde orta noktayı bulmaya yarayan kesişim noktalarını göstermeleri ve ardından hiç silmeden farklı kesişim noktaları bulup bulamayacakları sorulmuştur. Öğrenciler bu sayede orta dikme üzerinde yer alan noktaların ayrı ayrı doğru parçasının iki ucuna eşit uzaklıkta olması gerektiğini görmüşlerdir. Pergeli en az ne kadar açabilecekleri sorusu ile birlikte doğru parçasının yarısı kadar açıldığında tek nokta kesişimi elde ettikleri ve dolayısıyla doğru parçasının yarısından fazla açmaları gerektiğini vurgulayabilmüşlerdir. Böylece bir doğru parçasının orta noktasını bulmayı gerektiren oluşum sürecinin dinamikleşen düşünme yolları ile yapılandırılması desteklenmiştir (Şekil 14).



Şekil 14. Farklı Açıklıklarda Açılan Pergel ile Aynı Doğru Parçasının Orta Noktasını Bulma Süreci

Görüşmeler sırasında tüm odak katılımcıların doğru parçasının orta noktasını bulma oluşumunu gerçekleştirebildikleri görülmüştür. Ancak, İlkan'ın doğru parçasının orta noktasını bulurken pergeli doğru parçası kadar açmak zorunda olduğunu ileri sürmesi, çemberlerin kesişim noktasının ortak özelliğini ne aynı doğrultuda olmaları ne de doğru parçasının orta dikmesi üzerinde yer alarak uç noktalara eşit uzaklıkta olmalarını gerekçe göstererek savunamaması onun henüz durağan bir oluşum imajı yapılandırıldığını göstermiştir. Aşağıda görüşme sırasında İlkan'ın kesişim noktalarının ortak özelliği sorulduğunda gerekçelendirme yapmakta yetersiz kaldığı görülmektedir.

Görüşmeci: Peki bu kesişim noktalarının (hem çemberlerin kesişim noktaları hem de orta nokta) ortak özelliği ne?

İlkan: Düz bir şey...doğru parçası olması...

Kesişim noktalarının kritik oluşunu hem doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olan bir yerde olmaları, hem de orta dikme olan doğru üzerinde yer almalarını gerekçe göstererek savunabilen Salim'in pergeli açıklığının farklı uzunluklarda olabileceğini gösterebilmesi onun dinamikleşen düşünme sürecini işaret etmiştir. Ayrıca pergelin açıklığının doğru parçasının uzunluğunun yarısından daha kısa olmaması gerektiğini vurgulamış ve hatta yarısı kadar olduğunda tek nokta belireceği için kabul edilebilir olmadığını açıklayabilmiştir. Ancak pergeli açıklığının doğru parçasının yarısı ile doğru parçası uzunluğu arasında olduğunda oluşumu sağlayıp sağlamayacağı konusunda kararsızlık yaşadığı görülmüştür. Bununla birlikte bazı durumlarda inşa ettiği yayların iki kesişim noktası yerine sadece bir kesişim noktasını ortaya çıkarması onun dinamikleşen oluşum imajının aksak yönlerini göstermektedir. Aşağıda Salim' in bu eylemlerini gösteren görüşme alıntıları sunulmuştur.

Görüşmeci: Peki sen pergeli bu kadar açtın ya. Daha farklı bir açıklıkta da tutabilir miydin?

Salim: Açabilirdim. Bu kadar açarsam (doğru parçasının yarısı kadar) olmaz. Şurada bir yerde kesişir (doğru parçası üzerinde orta noktanın kendisini gösteriyor). Kritik bir kesişme olur. Düzgün olmaz. Daha büyük açarsak olur.

Görüşmeci: Ne kadar açarsak olur ne kadar açarsak olmaz?

Salim: Küçük açarsak olmaz. Pergeli doğru parçası kadar açarsak ya da daha fazla olur, doğru parçasından az açarsak olmaz. (doğru parçasının yarısından fazla doğru parçasının kendisinden kısa olan uzunlukları kabul edilemeyeceğini gösteriyor)

Pergel açıklığının değişkenliğini eksiksiz bir şekilde yorumlayıp savunabilen Ceylan ise çemberlerin kesişim noktalarının kritikliğini sadece doğrusal olmaları ile gerekçelendirmiştir. Aşağıda verilen görüşme alıntısında kendisine açıkça sorulmasına rağmen orta dikmeyi oluşturan kesişim noktalarının doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta yer almalarını bu oluşumda kritikliği sağlayan bir dayanak olarak gösteremediği görülmüştür. Bu da Ceylan'ın orta nokta oluşumunda yapılandırma yolunda olduğu açıkça görülen dinamik yapının kavramsal temelindeki onarılması gereken bir eksikliğini göstermektedir.

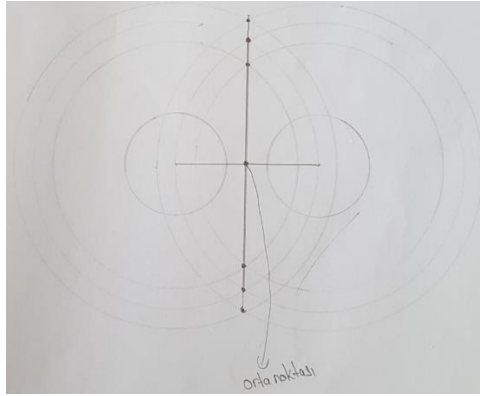
Görüşmeci: Peki bu noktaların ortak özelliği ne? Şunun şunun şunun...(çemberlerin kesişim noktası ve orta nokta parmakla gösterilerek soruluyor) yani kesişimdeki noktalar ve bu noktanın.

Ceylan: Bu parça ile bu parçayı bileştiren bu noktalar (orta dikmeyi oluşturmasından bahsediyor).

Görüşmeci: Bu kesişim noktalarının doğru parçasının uç noktalarıyla ilişkisi ne?

Ceylan: ... (sessizlik)

Emre'nin ise pergel açıklığının değişkenliğini matematiksel gerekçelendirmelerle savunabildiği görülmüştür. Bu katılımcı pergelin farklı açıklıkları için oluşumun gerçekleştirilmesinde orta dikme üzerinde yer almalarından dolayı kritik olan kesişim noktalarını doğru parçasının her iki ucuna eşit mesafede bir yerde olmasını dayanak olarak gösterebilmiştir (Şekil 15). Gerçekleştirilen görüşmede doğru parçasının uç noktaları merkezli aynı yarıçaplı çemberlerin kesişim noktalarının ortak özelliği için "hepsi aynı doğru üzerinde oluyor. Bir de uzaklıkları buralara (doğru parçasının uç noktaları) hep aynı oluyor" açıklamasını yapmıştır. Bu sebeple Emre'nin orta nokta inşasında yapılandırmakta olduğu dinamik düşünme yapısını aynı zamanda kavramsal olarak sağlam temeller üzerine oturtma yönünde emin adımlarla ilerlediği düşünülmektedir.



Şekil 15. Emre'nin Pergel Açıklığının Değişkenliğini Göstererek Doğru Parçasının Orta Noktasını İnşası

Sonuç olarak öğrenme yörüngesinde uç noktalardan eşit uzaklıkta yer alan noktaların belirlenmesinde pergel açıklığına yönelik öğretim deneyi öncesinde öngörülemeyen iki farklı eylemin ortaya çıktığı görülmüştür. Bu doğrultuda öngörülen öğrenme yörüngesinde revize edilmesini gerektiren yönler aşağıda kırmızı renkli olarak verilmiştir.

Revize Edilmiş Öğrenme Yörüngesi

Öğrenme Amacı 3: Bir doğru parçasının orta noktasını pergel ve çizgeç yardımıyla bulur.

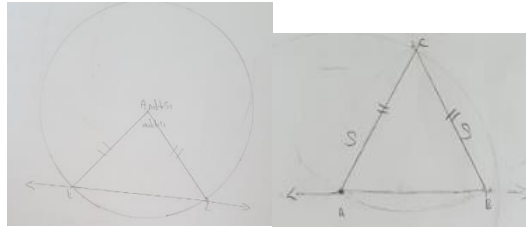
Görev 6: Verilen doğru parçasının orta noktasını bulunuz.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Belirli bir uzaklık belirleyerek uç noktalardan o uzaklık kadar uzakta olan olası noktaları pergel yardımıyla belirleme (kendisinin belirlediği bir yarıçapta uç noktalar merkez olacak şekilde çemberler inşa etme).
 - ♦ Uç noktalardan eşit uzaklıktaki nokta kümelerini pergel açıklığını doğru parçasının uzunluğu kadar açmak koşuluyla belirleme (uç nokta merkezli çemberlerin yarıçapı doğru parçası kadar olmak koşulu).
 - ♦ Uç noktalardan eşit uzaklıktaki nokta kümelerini pergel açıklığı doğru parçasının yarısı kadar olacak şekilde belirleme (uç nokta merkezli çemberler teğet olacak şekilde).

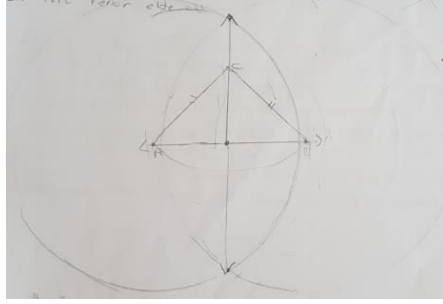
Bir Doğruya Dışındaki Bir Noktadan Dikme İnşa Etme Oluşumu

Bir doğruya dışındaki ya da üzerindeki bir noktadan dikme inşa etme oluşumunun temelini ikizkenar üçgende tepe noktasından tabana inilen yükseklik inşasına dayanmasından dolayı derse öncelikle ikizkenar üçgen inşa etme süreci ile başlanmıştır. İkizkenar üçgenin inşasında beş farklı performansın ortaya çıktığı görülmüştür: (i) sadece çizgeç kullanarak deneme yoluyla, (ii) çizgeç ve pergeli kullanarak ancak tek nokta belirleme yoluyla, (iii) kenar olacak doğru parçalarını düzlemde inşa edip onları olası noktaları ortaya koyarak aktarma yoluyla, (iv) bir çember inşa edip yarıçapların eşliğini kullanarak, (v) doğru parçasını taban kabul ederek tabanın uç noktaları merkez olacak şekilde aynı yarıçaplı çemberlerin kesişimi yardımıyla. İlk iki yolun kabul edilemez olduğu sınıf tartışmalarında rahatça savunulabilmiştir. Kabul edilebilir olan üçüncü yol doğru parçasını aktarma ve üç kenarı verilen üçgenin inşası oluşumlarının yansıtılmasına olanak tanınması açısından değerlidir. Dördüncü yol ise çemberin düzlemde bir noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri olarak içselleştirilmesinde önemli bir göstergedir. Beşinci yol dikme inşasında en kullanışlı görülebilecek yol olarak ön plana çıkmaktadır. Bu sebeple öğrencilerin belki de bu yolu keşfetmelerine ya da benimsemelerine olanak vermek amacıyla dikme inşasına doğrudan destek verecek “bir doğru üzerinde ikizkenar üçgenin tabanını kendilerinin belirlemeleri ve bu tabana ait ikizkenar üçgeni inşa etmeleri” görevi sunulmuştur. Devamında bu görev ikizkenar üçgenin tepe noktası olacak olan doğru dışında bir nokta belirlemeleri talebi ile genişletilmiştir. İlk olarak üç farklı performans ortaya konmuştur: (i) tabanın sadece bir köşesini istenilen doğru üzerinde belirleyebilen ve dolayısıyla tabanı doğru üzerinde inşa edemeden ikizkenar üçgen oluşturma, (ii) pergeli bir ölçüm aracı gibi kullanıp onu tepe noktasına koyup doğru üzerinde birer nokta bırakarak (yay veya çember çizip olası noktaları belirlemeden tek nokta ile) inşa etme, (iii) doğruyu doğru parçası gibi düşünerek, sanki doğrunun sonundaki okları tabanın köşeleri gibi düşünüp pergeli o uçlardan doğru dışındaki noktaya kadar açarak ikizkenar üçgeni oluşturma. Sınıf ortamında da ortaya konan bu stratejilerin tartışılması sürecinde “tepe noktasının özelliği nedir?, tabanınız belli mi doğru üzerinde?, eş olan iki kenarı nereye inşa etmeyi düşünüyorsunuz?, tepe noktasından tabanın uç noktalarına olan mesafe ne kadar olmalı?” gibi yönlendirici sorular ile karşı karşıya kalan öğrencilerin tabanı doğru üzerinde yer alan ve tepe noktası doğru dışında belirlenen nokta olan ikizkenar üçgeni, hedeflenen süreç ile inşa etmeye başladıkları görülmüştür (Şekil 16).



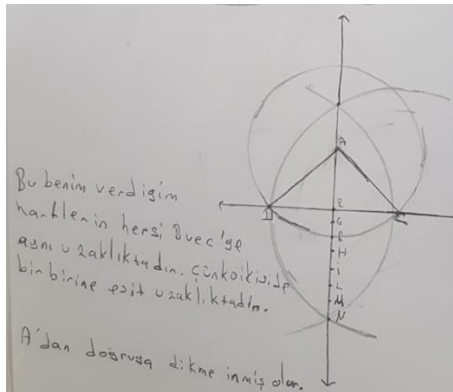
Şekil 16. Doğru Üzerinde Bir Doğru Parçası Taban, Doğru Üzerinde Olmayan Nokta Tepe Noktası Olmak Koşuluyla Olası Noktaları Belirleyerek İkizkenar Üçgenin İnşa Edilmesi Örnekleri

Devamında talep edilen ikizkenar üçgenin tabanının orta noktasının bulunması görevi sırasında bazı öğrencilerin orta noktayı bulmaya yarayan kritik noktalardan (çember ya da yayların kesişim noktaları) geçen doğrunun aynı zamanda tepe noktasından geçtiğini fark ettikleri görülmüştür (Şekil 17).



Şekil 17. Tabanın Orta Noktasını Bulmaya Yarayan Doğrunun Aynı Zamanda Doğru Dışındaki Nokta Olan Tepe Noktasından Geçtiğinin Görülmesi

Ardından öğretmen tarafından “bir ikizkenar üçgende tepe noktasından tabana indirilen yükseklik yani dikme tabanı iki eş parçaya böler” teoremi öğrencilere aktararak bu teorem üzerine yansıtma yapmalarına olanak tanınmıştır. Bu teoremin “eğer bir ikizkenar üçgende tepe noktası ile tabanın orta noktasından bir doğru ya da doğru parçası geçiyorsa o doğru ya da doğru parçası dikme olmak zorundadır” şeklinde yorumlanması için doğrudan destek verilmiştir. Devamında öğrencilere bir doğruya o doğru üzerinde yer almayan bir noktadan geçen bir dikme inşa etme görevi verilmiştir. İlk olarak göz kararı dikme inşa edenler dikkat çekmiş ancak bunun analiz aşaması olarak düşünüldüğünde normal karşılanabileceği düşünülmüştür. Kendilerinden o göz kararı inşa etmiş oldukları doğru ya da doğru parçasının dikliği konusunda öğretmeni ya da kendilerini ikna etmeleri yönünde savunma yapmaları ısrarla talep edilmiş ve ikizkenar üçgen temelinde dikme inşasına geçiş bu şekilde başlamıştır. Grup içi tartışmalar ile başlayan etkileşimin daha derinleştirilmesi amacıyla sınıf tartışmalarında neden ikizkenar üçgen inşa edildiği, doğru dışındaki noktanın ve doğru üzerinde oluşan doğru parçasının ikizkenar üçgende ne anlama geldiği, ikizkenar üçgen elemanlarının gösterilmesi gibi sorgulamalar gerçekleştirilmiştir. Ayrıca kritik noktaların ve özellikle doğru dışında yer alan aynı zamanda tepe olan noktanın orta dikme üzerinde yer alma özelliğinin içselleştirilmesi için tepe noktası, tabanın orta noktası, orta noktayı bulmaya yarayan kesişim noktalarının ortak özelliği sorgulanmıştır. Şekil 18’de bir dikme inşasını gerçekleştiren bir öğrencinin bireysel çalışma kâğıdında ikizkenar üçgenin tabanın orta dikmesi üzerinde harfler verdiği ve “bu benim verdiğim harflerin hepsi B ve C’ye (tabanın uç noktalarına) eşit uzaklıktadır” açıklaması görülmektedir.

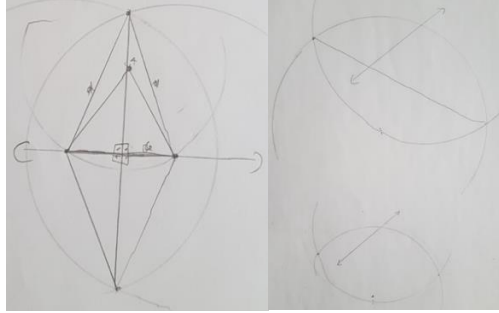


Şekil 18. Tepe Noktasını Da İçine Alan Orta Dikmenin Üzerindeki Noktaların Taban Olan Doğru Parçasının Uç Noktalarına Eşit Uzaklıkta Bir Yerde Olduklarının Fark Edilmesi

Dinamikleşme yolunda düşünme süreçlerinin desteklenmesi için pergel açıklığının değişkenliği yorumlanması ve buna bağlı olarak tabanın veya ikizkenar üçgenin eş kenarlarının farklılaştığının görülmesi, tepe noktası merkezli ilk inşa edilen çember ya da yay için doğruyu en az iki noktada kesecek kadar açıklığın alt limitinin fark edilmesi yönünde sorgulamalar yapılmıştır. Ayrıca kanıt ve tartışma süreçlerinin iç içe girmiş olduğu düşünülebilecek bu sorgulamalarda öğrenciler farklı

yön ve doğrultularda yer alan doğrulara farklı yerlerdeki noktalardan dikme inşa etme görevleri ile karşı karşıya bırakılmıştır.

Gerçekleştirilen görüşmelerde İlkan sadece yatay doğru için dikme inşasını gerçekleştirebilmiş ancak kendisinden yatay olmayan bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa etmesi istendiğinde oluşumda attığı adımların kontrolünü de kaybettiği görülmüştür (Şekil 19).



Şekil 19. İlkan'ın Yatay Doğru İçin Dikme İnşasını Gerçekleştirmesi (Solda) Ancak Yatay Olmayan Doğru İçin İnşa Sürecinde Kontrolü Kaybetmesi (Sağda)

İlkan her ne kadar inşa ettiği oluşumda ikizkenar üçgenin varlığını gösterip, orta nokta bulduğunun farkında olduğunu göstererek kavramsal altyapı yönünde olumlu adımlar atsa da ikizkenar üçgenin tepe noktası, tabanı, tabanın orta noktası ile tepe noktasından geçen doğru parçasının dik olması gibi savunmalar yapamadığı görülmüştür. Dikliği daha çok görsel olarak algıladığını düşündüren İlkan, algoritmik bir sıra ile adımları savunuyor izlenimi doğurmuştur ki bu da yatay olmayan doğrulara inilen dikmelerde kontrolü kaybetmesinde önemli bir sebep olarak görülmektedir. Aşağıda dikme inşasında attığı adımları ikizkenar üçgen ile ilişkilendirerek savunamadığını gösteren örnek bir görüşme alıntısı sunulmuştur.

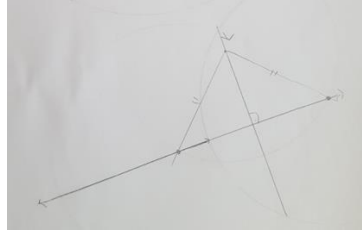
Görüşmeci: Peki sen nereden biliyorsun bu doğrunun burada 90 derecelik bir açı yaptığını? Nasıl kanıtlarsın bana bunu?

İlkan: Diktir hocam bu. Kesişiyor şuraları (dikme ile doğrunun kesiştiği noktayı gösteriyor ve buralara dik açı sembolü koyuyor).

Görüşmeci: mesela senin yaptığın bir şey mi var burada? Orta nokta mesela neyin orta noktası? Bu A mesela (doğru dışında alınan nokta) bir şeye mi denk geliyor o şekilde?

İlkan: Bir çizgiyi inşa etmiştik (çizgiden kastının dikme olduğunu kalemle fark ettiriyor). Bir doğru parçası oldu şuralardan alırsak (çemberlerin kesişim noktaları arasında kalan dikmeyi diyor). Hocam bunları sağlaması için doğru ve doğru parçası olması gerekir. Mesela hocam şunlar kesişiyor ya (doğru ile indirdiği dikme) bir artı şekli oluyor hocam. Artı şekli olduğu için şuraları da 90 ar derece oluyor (kalemle 90 derece sembolünü koyuyor).

Oysaki diğer odak katılımcıların görüşmeler sırasında yatay olmayan doğrulara dikme inşa edebildiği (Şekil 20) ve ayrıca attıkları adımları ikizkenar üçgen aracılığıyla savunma yönünde eylemleri açıkça görülmüştür (Şekil 21). Aşağıda bu yönde eylemlere örnek bir görüşme alıntısı sunulmuştur.



Şekil 20. Yatay Olmayan Bir Doğruya Doğruyu Uzatarak Dışındaki Bir Noktadan Dikme İnşa Etme

Görüşmeci: Dikme üzerindeki bu noktaların ortak özelliği ne? Şu şu şu (kesişim noktaları gösteriliyor)

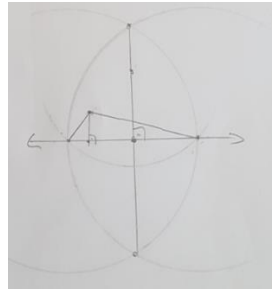
Salim: Hepsi şu noktalara eşit uzaklıkta (ikizkenar üçgenin taban köşelerini gösteriyor).

Görüşmeci: Diklikle ne alakası var o noktalara eşit uzaklıkta olmasının?

Salim: Hocam mesela dik olmasaydı şu (dikme) biraz şöyle (doğruya dik değil de başka bir açıyla gelseydi) olsaydı o zaman noktalar buraya eşit uzaklıkta olmazdı.

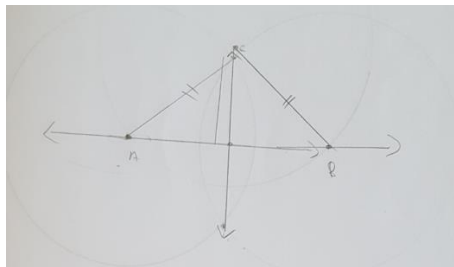
Görüşmeci: İkizkenar üçgen olmasaydı senin yaptığın işlemin aynısını yapsan dikme olmaz mıydı?

Salim: Çeşitkenar olsa mesela şöyle olurdu (doğru dışında alınan noktanın oluşan doğru parçasının orta dikmesi üzerinde olmayacağını ve dolayısıyla o noktanın doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olmayacağını gösteriyor eliyle). O zaman da dikme şöyle olurdu (dikmenin orta noktaya düşmeyeceğini doğruyu başka bir yerde keseceğini göstermeye çalışıyor)



Şekil 21. İnşa Edilen Üçgenin İkizkenar Olmaması Varsayımına Dayalı Olarak Dikme İnşasının Tabanın Ortasına İnmeyeceğini Gösterme

Dikme inşasının başlangıcında bir araç olarak inşa edilip gösterilen ikizkenar üçgenin zamanla gösterimine gerek kalmaksızın dikme inşasında genellikle kanıt için başvurulan bir araç olarak kabul edildiği dikkat çekmiştir. Örneğin, aşağıda sunulan görüşme alıntısında Ceylan'ın ikizkenar üçgeni ortaya koymadan istenilen dikmeyi inşa ettiği ancak savunma yaparken ikizkenar üçgeni açığa çıkararak ona başvurduğu görülmektedir (Şekil 22).



Şekil 22. Ceylan'ın Doğruya, Dışındaki Bir Noktadan Dikme İnşa Etme Oluşumunu İkizkenar Üçgene Dayalı Olarak Savunması

Görüşmeci: Peki C'nin özelliği ne? C ve şu çemberlerin kesişim noktaları, bu üç noktanın ortak özelliği ne?

Ceylan: Hepsinin eşit olması A ve B noktalarına. Mesela burada da olsa nokta (orta dikme doğrusu üzerinde bir noktadan bahsediyor) ikizkenar oluyor hep (Kalemle ikizkenar üçgeni gösteriyor ama çizmeden sadece üstünden geçerek)

Görüşmeci: Nerede ikizkenar üçgen? Orada bir ikizkenar üçgen mi görüyorsunuz?

Ceylan: Evet yardım alıyoruz ikizkenar üçgenden. İşte burada (çizdi)

Sonuç olarak öngörülen olası öğrenme yörüngesinde ikizkenar üçgenin inşası sırasında önceki oluşumlardan üç kenarı verilen bir üçgenin inşası ve orta nokta bulma süreçlerinin yansıtılmasını sağlayan iki farklı eylemin ortaya konabileceği görülmüştür. Bu doğrultuda öğrenme yörüngesinde revize edilmesi gereken yönler kırmızı renkli olarak aşağıda verilmiştir.

Revize Edilmiş Öğrenme Yörüngesi

Öğrenme Amacı 4: Pergel ve çizgeç yardımıyla bir doğruya, o doğruya ait olmayan bir noktadan geçen dikme inşa eder.

Görev 8: Bir ikizkenar üçgen çizin.

Öngörülen Öğrenme Süreci

- ♣ Kenar olacak doğru parçalarını düzlemde başka bir yerde inşa edip onları aktarma yoluyla diğer bir deyişle üç kenarı verilen üçgeni inşa etme oluşumu ile ikizkenar üçgen inşa etme.
- ♣ Bir doğru parçasını taban kabul ederek tabanın uç noktaları merkez olacak şekilde aynı yarıçaplı çemberlerin kesişimini tepe noktası belirlemek koşuluyla ikizkenar üçgen inşa etme.

Öğrenme Sürecinde Beklenen Başlıca Kritik Eylemler

- ♣ Sonradan tepe noktası rolünü alacak olan doğru dışında alınan noktanın orta nokta bulma sırasında inşa edilen orta dikme üzerinde yer aldığını fark eder.

Bir Doğruya Kendi Üzerindeki Bir Noktadan Geçen Dikme İnşa Etme Oluşumu

Bir doğruya o doğru üzerinde yer alan bir noktadan dikme inşa etme görevi ile başlayan bu derste öğrencilerin doğru dışındaki bir noktadan dikme inşa etme deneyimlerinin katkısıyla analiz sürecini hızlı bir şekilde geçebildikleri görülmüştür. Hemen pergel ve çizgeç ile oluşumu inşa etme girişiminde bulunan tüm grupların ikizkenar üçgen inşa etmeleri gerektiğinin farkında oldukları dikkat çekmiştir. Öncelikle doğru dışında tepe noktası olacak olan noktanın olmamasından dolayı sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Tepe noktası için orta nokta oluşumunu yansıtması gerektiğini ileri süren İlkan'ın doğruyu doğru parçası gibi ve dikme inşa edilecek noktayı da o doğru parçasının orta noktası gibi düşündüğü görülmüştür. Ancak her ne kadar bu yönlerden eksiklikleri de olsa bu strateji "dikme inşa edilecek noktayı orta nokta kabul eden ikizkenar üçgenin tabanının inşa edilmesi" adımı için tetikleyici olmuştur. Aşağıda bu sürece yönelik sınıf tartışmalarından bir kesit alıntı olarak sunulmuştur.

Öğretmen: Tepe noktasının nasıl bulabiliriz peki? Nasıl olmalı?

Salim: Öyle bir nokta olmalı ki ikizkenar üçgen sağlasın.

İlkan: Hocam bu uç noktaya koyarız bir çember çizeriz sonra diğer uca koyup yine çizeriz (uç nokta dediği doğrunun ok sembolü ile gösterilen kısımları. Dolayısıyla tabanın uç noktaları değil. Doğruyu doğru parçası gibi düşünüp dikme inşa edilecek noktayı da doğrudan orta nokta kabulü ile yapmış oluyor bu şekilde) Ama pergeli yarımdan fazla açmalıyız. Sonra çemberlerin kesişim noktası iki uca da eşit uzaklıkta olur. İşte tepe noktası.

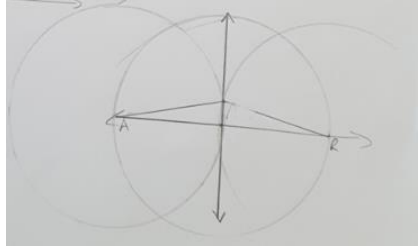
Öğretmen: Peki ama daha önceden siz orta nokta, tabanın iki ucuna eşit uzaklıkta dediniz. Siz o eşit uzaklıktaki uç noktaları belirlediniz mi?

Salim: Önce pergeli şu kadar (doğruyu doğru parçası gibi düşünüp ok ile gösterilen kısımlarını uç kabul ederek o uçlar arası kadar) açıp noktaya (doğru üzerinde dikme inşa edilmesi istenen nokta) koyup çemberi çizerim.

Öğretmenin “daha farklı açılabilir mi pergeli?” sorusu ile pergeli açıklığının değişkenliğini fark etme sürecine girilmiştir. Bu sırada doğru üzerinde ikizkenar üçgenin tabanını inşa etmelerinin ardından orta nokta bulma oluşumu ile tepe noktasını da açığa çıkarabilen öğrenciler olmuştur (Şekil 23). Etkileşim ile birlikte büyük bir çoğunluğun doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa etme oluşumunda aşına oldukları benzer adımları atarak doğru üzerinde sunulan bir noktadan o doğruya dikme inşa edebildiklerini fark etmişlerdir. Aşağıda sunulan sınıf tartışmalarından bir alıntıda, öğrencinin pergeli açıklığının değişkenliğini de fark ederek dikme inşa etme sürecinde attığı adımları açıklayabildiği görülmektedir.

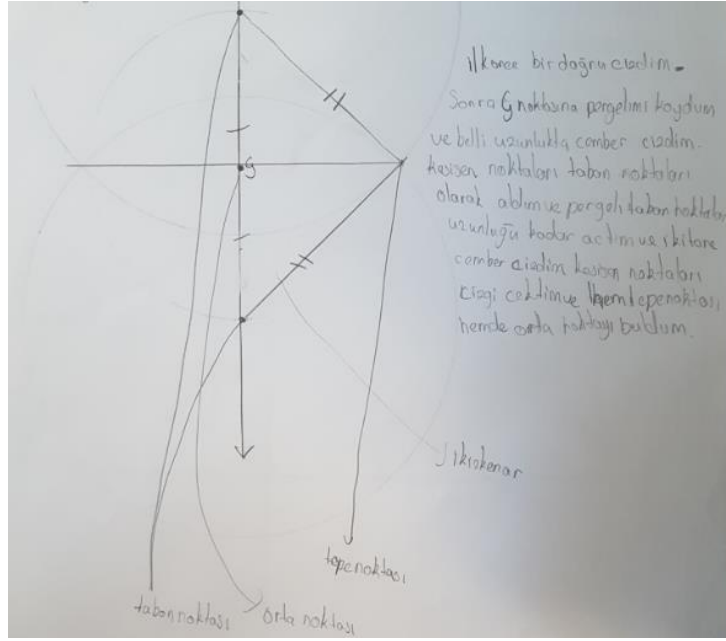
Öğretmen: Pergeli daha farklı açabilir misin?

Öğrenci: Açarım istediğim kadar. Sonra A noktasına koyar (tabanın uç noktalarını belirleyerek onlara A ve R ismini verdi) bu kadar açıklıkta çizerim (yay çizdi biraz daha açarak pergeli), sonra R ye koyup da çizerim. Kesişim noktası tepe noktası olur.



Şekil 23. Doğruya Ait Bir Noktadan O Doğruya Dikme İnşa Etme Oluşumunun Öğretim Deneyinde İlk Ortaya Konan Örneklerinden Bir Görüntü

Bu sırada orta nokta bulma oluşumunu yansıttıklarının farkında olan öğrenciler bu sayede tepe noktası ve orta noktadan geçen doğru ya da doğru parçasının istenilen dikme olduğunu rahatlıkla fark edebilmişlerdir. Ardından dinamik düşünme süreçlerinin desteklenmesi amacıyla sırasıyla önce dikey bir doğruya sonra çapraz bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme inşa etme görevleri ile süreç genişletilmiştir. Tartışma aşaması olarak düşünülen bu süreçte ikizkenar üçgene dayalı savunmalar yapmalarını gerektiren sorgulama süreçleri kanıt aşaması olarak ortaya çıkmıştır. Şekil 24’te dikey bir doğruya üzerindeki bir noktadan geçen dikme inşası gerçekleştiren katılımcının “ilk önce bir doğru çizdim. Sonra G noktasına pergelimi koydum ve belli bir uzunlukta (yarıçapta) çember çizdim. Kesişen noktaları (çember ile doğru arasında) taban olarak aldım ve pergelimi taban noktaları arasındaki uzaklık kadar açtım. İki tane çember çizdim (tabanın uç noktaları merkezli) ve böylece hem tepe noktası hem de orta noktayı bulmuş oldum” açıklaması ile attığı adımları ikizkenar üçgen aracılığıyla savunabildiği görülmektedir.



Şekil 24. Dikey Bir Doğruya Üzerindeki Bir Noktadan Geçen Dikme İnşa Etme Oluşumunun İkizkenar Üçgen Elemanları ile İlişkili Olarak Savunma

Gerçekleştirilen görüşmelerde hem yatay hem de yatay olmayan bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme inşasını tüm katılımcıların gerçekleştirebildiği görülmüştür. Ancak kavramsal temellerin sorgulandığı atılan adımları savunma süreçlerinde farklılıklar ortaya çıkmıştır. Emre ve Ceylan'ın ikizkenar üçgen inşasını dayanak gösterebildiği ve ikizkenar üçgenin elemanları ile savunma yapabildiği açıkça görülmüştür. Aşağıda buna yönelik örnek bir görüşme alıntısı verilmiştir.

Görüşmeci: Niye orada böyle bir çember çizme gereği duydun?

Emre: A noktasına (dikme inşa edilmesi istenen doğruya ait bir nokta) koyduğumda pergeli istediğim şekilde açtım. Çünkü pergelle çizdiğimde taban noktalarını bulurum.

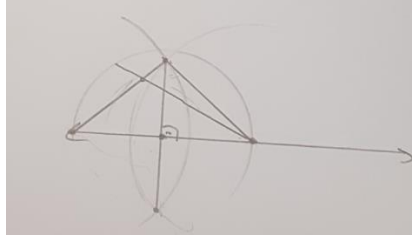
Görüşmeci: Peki neden böyle özel nokta bulma gereği duydun (taban uçları merkezli çemberlerin kesişim noktası).

Emre: Taban noktalarını bulduğumda pergeli istediğim kadar, doğru parçasının yarısından fazla açarak çemberleri çizdiğimde kesişim noktaları birleştirip hem orta noktayı bulmuş olurum hem de tepe noktasını.

Salim ve İlkan'ın ise ancak kendilerine doğrudan sorulduğunda ikizkenar üçgenin varlığına dikkat çekebildikleri görülmüştür. Attığı adımları ikizkenar üçgenin elemanları ile doğrudan ilişkilendiremediği görülen Salim' in ikizkenar üçgenin dikme inşasında gerekliliğini ise doğru dışındaki bir noktadan doğruya dikme inşa etme oluşumunda olduğu gibi "ikizkenar olmasaydı..." diyerek çeşitkenar bir üçgende dikmenin tabanın orta noktasına inmeyeceği savunması ile yapmıştır (Şekil 25). Aşağıda sunulan görüşme alıntısında bu yöndeki savunması görülmektedir.

Görüşmeci: İkizkenar üçgen yardımıyla nasıl açıklarsın bu dikliği?

Salim: Hocam şuralar eşittir (tepe noktasının tabanın uç noktalarına olan doğru parçalarını gösteriyor). O yüzden dik. Mesela şöyle olsaydı (tepe noktası yerine biraz daha solunda bir nokta aldı ve çeşitkenar üçgen oluşturdu. O noktadan doğruya bir dikme indirmeyi göz kararı kalemle gösterdi) dik olurdu ama bu noktadan geçen bir dikme olmazdı.



Şekil 25. Salim'in İkizkenar Üçgen Olmasaydı İndirilen Yüksekliğin Tabanın Orta Noktasına İnmeyeceği Savunması

Attığı adımları ikizkenar üçgen elemanları ile ilişkilendiremediği görülen diğer katılımcı İlkan'ın ise daha çok işlemsel olarak oluşumu anlamlandırdığı dikkat çekmiştir. Aşağıda sunulan görüşme alıntısında savunma yaparken “işlemsel adımları sağlama” gerekçesini öne sürdüğü açıkça görülmektedir.

Görüşmeci: Neden ilk olarak bir çember çizdin bu doğru üzerinde?

İlkan: Dikme indirmek için biraz pergelimizi açıp çizmemiz lazımdı. Kesişen noktalarımızı da çizgeçle birleştirmemiz lazımdı. Neden bunları aldık? Çünkü buralardan alsaydık noktaları kesişim şurada olurdu (doğru üzerinde dikme inşa edilecek noktadan geçmezdi diyor). Yine bu noktadan da geçebilirdi ama birazcık çapraz olurdu dik olmazdı.

Görüşmeci: Peki neden bu iki noktaya (doğru üzerinde belirlediği tabanın uç noktaları) pergeli koyuyorsun?

İlkan: Bunlar (yaylar) kesişmeseydi noktaları birleştirerek dikme oluşturamazdık.

Sonuç olarak elde edilen sonuçlar doğrultusunda doğruya kendi üzerindeki bir noktadan dikme inşa etme oluşumu için öngörülen öğrenme yörüngesinin revize edilmesine gerek olmadığına karar verilmiştir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada altıncı sınıf düzeyinde temel geometrik oluşumların, kavramsal alt yapısı desteklenmiş bir süreçte öğrenilmesine ilişkin yenilenebilir ve geliştirilebilir bir öğrenme yörüngesi ortaya konmuştur. Bu öğrenme yörüngesinin, her ne kadar altıncı sınıf düzeyi için ileri sürülmüş olsa da, elde edilen sonuçlar açısından bakıldığında aynı zamanda daha üst düzeydeki bireyler ile daha karmaşık geometrik oluşumların gerçekleştirilmesini esas alan öğrenme ortamlarında kavramsal alt yapısı güçlendirilmiş dinamik oluşumlar ortaya konması için başvurulabilecek bir kaynak niteliğinde olabileceği düşünülmektedir.

Tapan ve Arslan (2009) geometrik oluşumları gerçekleştirme sürecinde öğretmen adaylarının daha çok görsel elemanlar kullanıp sadece deneysel gerekçelendirmeler ortaya koyduklarına dikkat çekmiştir. Benzer şekilde bu çalışmada da gerçekleştirilmesi amaçlanan ilk oluşum olan eş doğru parçasını inşa etme sürecinde deneme yanılma, göz kararı belirleme, çizgeç üzerinde işaretleme yapma gibi yasaklı eylemlerin tereddüt edilmeden tercih edilebildiği görülmüş ancak ilerleyen oluşumlarda bu girişimler yok olma sürecine girmiştir. Öğrencilerin pergel yardımıyla oluşum adımlarını gerçekleştirmeye doğru yönelmesinde pergelin açıklığı sayesinde bir ölçüm aleti gibi işlev görmesi belirgin rol oynamıştır. Pergelin bir ölçüm aracı gibi kullanılması eyleminin, her ne kadar deneysel bir gerekçelendirme olarak görülse de (ör. doğru parçalarının eşliğin gösterilmesi için aynı pergel açıklığında olduklarını gösterme), öğrenme sürecinde pergelin kritik rolünün fark edilmesine önemli katkı sağladığı dikkat çekmiştir. Pergel aracılığında da olsa sadece uç noktalar alt alta gelecek şekilde paralel eş doğru parçaları inşa etme, eş doğru parçalarının yön ve doğrultularının aynı olması gerektiği, eş doğru parçalarının sadece yatay olabileceği gibi kısıtlı eylemler ortaya çıkabileceği görülmüştür. Bu sonuçlar Ulusoy'un (2014, 2016) diklik ve paralellik oluşumları için ortaya koyduğu öğrencilerin, görsel imajlarla desteklenmiş sınırlı örnek uzaylarının etkisi ile durağan düşünme yolları ortaya koyabileceği

sonucunu desteklemektedir. Düşünme yollarının dinamikleşmesinin desteklenmesine, farklılaşan yön ve doğrultular üzerine sorgulama yapılmasının önemli katkı sağladığı görülmektedir. Bu süreçte oluşumu gerçekleştirmeye olanak tanıyan olası noktaların tamamının çember olarak ya da yeterli görülen bir kısmının yay olarak belirlenebilmesinin önemi dikkat çekmektedir. Olası noktaları belirlemek yerine öğrenciler pek çok zaman istenilen tek noktayı ortaya çıkarmayı hedeflemekte, bu da onları deneme yanılma gibi istenmeyen eylemlere itmektir. Nitekim ele alınan ikinci oluşum olan üç kenarı verilen bir üçgen inşası oluşumunda ilk doğru parçasının aktarılmasının ardından diğer ikisinin uç noktaları birleşecek şekilde aktarılması amacıyla denemeye dayalı eylem girişiminde bulunduğu dikkat çekmiştir. Bu oluşumun gerçekleştirilmesinde ve ardından farklı yön ve doğrultular üzerine düşünme süreçlerinin genişletilmesinde olası noktaların ortaya konmasının kritikliği açıkça görülmüştür. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki öğrencilerin bu öğrenme yörüngesi doğrultusunda olası noktaları öncelikle çember olarak belirleyip zamanla kendilerinin yay inşasına geçmesinin daha doğru olacağı düşünülmektedir. Çünkü öğrencilerin çembersel noktaların hangi kısmının yeterli olduğuna karar verebilme becerisi de zamanla gelişmektedir.

Geometrik oluşumların gerçekleştirilmesinde kritik noktaların doğru ile doğru, doğru ile çember ya da çember ile çemberin kesişim noktalarından elde edilebileceği bilinmektedir (Janičić, 2006; Kellison vd., 2019). Bu çalışmada öğrencilerin kesişim noktalarını kritik olarak görmeleri ve onları kritik yapan özellikleri fark ederek matematiksel gerekçelendirmelerle savunmaları yönünde destekleyici bir öğrenme yörüngesi ortaya konmuştur. Örneğin üç kenarı verilen üçgenin inşasında çemberlerin kesişimi ile elde edilen kritik noktaları fark eden öğrenciler orta nokta bulma oluşumunda buna ek olarak doğruların kesişimi ile kritik noktayı bulabileceklerini de fark etmişlerdir. Bununla yanında öğrencilerin hiçbir noktada çemberlerin kesişmediği pergel açıklıklarının da var olabileceğini fark etmeleri, buna dayanarak pergel açıklığının değişkenliğini yorumlayarak oluşumu gerçekleştirmeleri ve matematiksel gerekçeli savunmalar ortaya koymaları onların dinamik düşünme yollarının desteklenmesine önemli katkı sağlamaktadır. Ayrıca farklı pergel açıklıkları ile elde edilen çemberlerin kesişim noktalarını kritik yapan ortak özelliklerinin sorgulanması (ör. orta noktayı bulmaya yarayan tüm kesişim noktalarının orta dikmeyi oluşturması) düşünme süreçlerinin dinamikleşmesine fırsat verilmesi açısından gerekli görülmektedir. İlk üç gruptan gelen odak katılımcıların dinamikleşen düşünme süreçleri açıkça izlenebilirken dördüncü gruptan gelen odak katılımcının ise dikme inşasına doğru karmaşıklaşma ile birlikte daha durağan düşünme süreçlerini işaret eden matematiksel gerekçelendirme yapmaksızın sadece algoritmik adımları takip etme yoluna girdiği görülmüştür. Dördüncü gruptan gelen odak katılımcının araştırma öncesindeki açık uçlu testte doğru, doğru parçası, ışın çizibilmesine rağmen onlara yönelik herhangi bir açıklama ortaya koyamamış olması da dikkat çekicidir.

Lim (1997) öğrencilerin öğrendikleri geometrik oluşumları yansıtabilecekleri daha karmaşık oluşum problemleri sunarak onların daha üst düzey düşünme becerilerini desteklenebileceğine vurgu yapmaktadır. Napitupulu (2001) ve Kondratieva (2011) ise karmaşık geometrik oluşumların gerçekleştirilmesinde temel geometrik oluşumların içselleştirilerek yansıtılmasının gerekliliğine dikkat çekmektedir. Bu çalışmada ortaya konan öğrenme yörüngesinde öğrenilen bir oluşumun, farklı bir oluşumun gerçekleştirilmesi sırasında yansıtılabilmesine fırsat verilmesine dikkat edilmiştir. Bu sayede temel geometrik oluşumların içselleştirilmesinin desteklenmesine katkı sağlanabileceği düşünülmektedir. Ayrıca öğretim sürecinde sunulan yeni oluşum görevi öğrencide önceki geometrik oluşumları yansıtma gerekliliği doğuracağından Lim (1997) tarafından işaret edilen üst düzey düşünme becerilerinin desteklenmesine de olanak tanınmış olmaktadır. Örneğin, doğruya ait bir noktadan ya da ona ait olmayan bir noktadan geçen dikme inşasında hem üç kenarı verilen bir üçgenin inşası hem eş doğru parçası inşası hem de orta nokta bulma oluşumlarının yansıtılmasına olanak tanınmaktadır. Öğrencilere tartışma ortamlarında bu oluşumların varlığına yönelik sorgulayıcı sorular yöneltilmesi ve onları esas alan savunma süreçleri ortaya koymaları için teşvik edilmeleri oluşumlar arasında ilişkilendirmeler yapmaları için onlara fırsat vermektedir. Bu sayede Smart (1998) tarafından önemi vurgulanan, inşa edilen bir geometrik yapının karakteristik özelliklerinin fark edilmesi ve diğer yapılarla ilişkilerinin açığa çıkarılması yönünde adımlar desteklenmiş olmaktadır. Öğretim deneyi ve

görüşmeler sırasında öğrencilerin bu ilişkiler ve özellikler temelinde matematiksel gerekçelendirmeler öne sürerek savunma yapabilmesinin, onların kavramsal alt yapısı güçlendirilmiş oluşumlar gerçekleştirme sürecinin değerlendirilmesinde önemli bir dayanak oluşturduğu görülmüştür.

Ulusoy (2014, 2016) ile Paksu ve Bayram (2019) ortaokul öğrencilerinin dikme inşasını gerçekleştirirken ya da dikliğin varlığı konusunda yargıda bulunup savunma yaparken yatay veya dikey doğrularda daha başarılı olabildiklerini ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada benzer şekilde öğrencilerin özellikle yatay doğrulara dikme inşa ederken başarılı eylemleri dikkat çekmiştir. Öğrencilerin yatay veya dikey olmayan doğrulara da dikme inşası gerçekleştirebilmeleri için bu oluşumun kavramsal alt yapısını oluşturan ikizkenar üçgende yükseklik inşasını anlamlandırmalarının, bu süreçte yansıttıkları orta nokta bulma oluşumunun farkında olmalarının ve gerekçelendirmelerini bu temeller üzerine kurmalarının olumlu katkıları açıkça görülmüştür. Nitekim dikme inşasında bu temeller üzerinde gerekçelendirme yapamadığı görülen, attığı adımları savunamayıp daha çok işlemsel olarak oluşumu gerçekleştiren İlkan'ın dikme inşasında sadece yatay doğrulara dikme inşası gerçekleştirebildiği diğer durumlarda ise kontrolü kaybettiği görülmüştür. Oluşumun sadece belirli durumlar için gerçekleştirilebilmesi, atılan adımların esnek eylemler ortaya konularak savunulamaması, alternatif yollar yaratmada başarısız olunması vb. esnek eylemler ortaya koyamama ve bunları gerekçelendirememeye dinamik düşünme yolları ortaya koymada eksiklik olarak görülmektedir. Ulusoy (2014, 2016) ortaokul öğrencilerinin zihinlerinde diklik için oluşturdukları kavram imajların iki dik doğrunun birbirini ortalaması gerektiği, doğruların uzunluklarının sınırlı olduğu yanılığısı ile dik doğruların eşit uzunlukta olması gerektiği, sadece yatay ve dikey doğru çiftinin diklik oluşturabileceği düşüncelerini içerdiğini göstermiştir. Bu sonuçlar ortaokul öğrencilerinin diklik için kavram imajlarının durağan düşünme süreçleri içerdiği şeklinde yorumlanabilir. Tapan ve Arslan'ın (2009) çalışmasında öğretmen adaylarının bile geometrik oluşumları gerçekleştirme sürecinde sadece görsel elemanlara dayalı deneysel gerekçelendirmeler yapılabildiği sonucu ortaya konmuştur. Bu çalışmada öne sürülen öğrenme yörüngesinin esas alındığı öğretim sürecinde İlkan dışındaki tüm odak katılımcıların sadece görsel imajlarla desteklenmiş işlemsel oluşumlar ortaya koymanın ilerisine giderek alternatif yolları açığa çıkarıp matematiksel dayanaklı gerekçelendirmeler yapabildikleri görülmüştür.

Ulusoy (2019) okullarda pergel ve çizgeç kullanımına dayalı geometrik oluşum etkinliklerine yeterince yer verilmediğine dikkat çekmekte iken, Tosun (2019) öğretmenlerin pergel ve çizgeç kullanımına olanak verecek şekilde ders planlaması yapması gerektiğinin geometri öğrenmedeki önemine vurgu yapmaktadır. Ancak öğretim sürecinin sadece analiz ve oluşum aşamaları (Smart, 1998) ile sınırlı olarak tasarlanmasının kavramsal alt yapısı güçlendirilmiş dinamik oluşumların inşa edilmesini desteklemede yetersiz kalacağı görülmektedir. Çalışma sonucunda ortaya çıkan bir oluşumun farklı yön ve doğrultularda gerçekleştirilebilmesi, inşa sürecinde geometrik yapıların değişen ve değişmeyen yönlerinin dikkate alınması, pergel açıklığının değişkenliğinin yorumlanabilmesi, olası noktaların gerektiğinde tümünün çember olarak ya da gerektiğinde bir kısmının yay olarak açığa çıkarılabilmesi, adımların gerçekleştirilme güzergâhında değişiklik yapılabilmesi ve gerektiğinde bu değişikliklerin yorumlanıp savunulabilmesi gibi bilişsel eylemlerin desteklenmesinin dinamik geometrik oluşumlar gerçekleştirilmesinde önemi açıkça görülmüştür. Bu desteklemeye olanak tanıyan öğrenme ortamlarında Smart (1998) tarafından ortaya konan kanıt ve tartışma aşamalarında varlık gösterilebilmesi için öğrencilere fırsat verilmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Oluşumların gerçekleştirilmesi sırasında görülen göz kararıyla ya da deneme yanılma yoluyla eylemler analiz aşaması olarak yorumlanmaktadır. Bu eylemlerin pergel kullanımına dayalı olarak olası noktaları belirleme doğrultusunda gelişim göstermesi, oluşum aşamasına geçişi desteklemesi ve daha sonraki aşamalar olan kanıt ve tartışma aşamaları için öğrenciyi hazırlıklı kılması yönünden değerlidir. Oluşum aşamasında sadece tek noktaya dayalı oluşumlar inşa etmek yerine öğrencilerin olası noktaları belirlemeyi bir alışkanlık haline getirerek bu doğrultuda savunma yapabilmesi kanıt ve tartışma sürecinde öğrencinin varlık gösterebilmesinde kritik bir role sahiptir. Bu noktada dinamik geometri yazılımlarının olası noktaları çember olarak pergele göre çok daha hızlı ve hatasız bir şekilde ortaya koyabilme, farklı renk seçenekleriyle aynı yarıçaplı çemberlerin kesişim

noktalarını daha görünür hale getirilebilme, sürüklenme özelliği ile değişen ve değişmeyen yönleri izleyebilme gibi fonksiyonları sayesinde, öğrenme ortamlarına entegre edildiğinde, kanıt ve tartışma sürecinde birçok öğrencinin etkinliğini arttıracak ve düşünme süreçlerinin dinamikleşmesine doğrudan katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Kuzle (2013) ve Ulusoy (2019) alternatif oluşumlar ortaya koyma ve oluşumların doğrulamasının yapılabilmesinde DGY destekli öğrenme ortamının sağladığı katkıyı göstermişlerdir ki bu süreçler kanıt ve tartışma aşamalarını doğrudan işaret etmektedir. Ayrıca Ulusoy (2019) DGY destekli öğrenme ortamında katılımcıların sağlam dayanaklar sunmaları gerektiğini fark ettikleri sonucuna ulaşmıştır. Nitekim öğrenciler sağlam dayanaklar sunamadıklarında, DGY destekli öğrenme ortamında, örneğin sürüklenme özelliği sayesinde şekli hareket ettirdiğinde değişmemesi beklenen kritik özelliklerinin değiştiğini anlık olarak hem de kendi kendine görebilmektedir. Bu ve benzer bir süreçte öğrencinin oluşumu gerçekleştirmekte başarısız olduğuna ikna olması çok daha kolay olabilmektedir. Pergel ve çizgeç ile kağıt kalem ortamında pek çok zaman görsel elemanlar kullanıldığı (Tapan ve Arslan, 2009) veya prototip şekillerle sahip olunan görsel imajların etkisinde kalındığı için (Paksu ve Bayram, 2019; Ulusoy, 2014, 2016) öğrencilerin oluşumu gerçekleştirmekte başarısız olduğuna ikna olması oldukça zor olabilmektedir. Lim (1997) ve Kunimune ve diğerleri (2010) ortaokul düzeyinde öğrenciler için formal anlamda kanıtlar yerine onlar için anlamlı gerekçelendirmeler sunulması gerektiğine dikkat çekmektedir. Bu çalışmada da öğrencilerin, kendilerine uygun öğrenme ortamı sunulduğunda, oluşum sürecindeki eylemlerini matematiksel dayanaklı gerekçelendirmeler sunarak savunabilecekleri görülmüştür. Tasarlanan öğrenme yörüngesinin DGY destekli bir öğrenme ortamı için düzenlenerek uygulanması, öğrenciler için oluşumun dinamik hareketlerine olanak tanıyarak eylemlerin ve ulaşılan sonuçların doğrulanmasına hızlı bir şekilde fırsat verilmesi anlamına gelmektedir. Nitekim Kuzle (2013) doğrulama sürecindeki etkililiğine dikkat çektiği DGY'lerin görselleştirmeyi sağlama, kesinlik belirtme ve hızlı olma işlevleri sayesinde öğretim sürecinde kullanışlı olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmada temel geometrik oluşumların altıncı sınıf düzeyinde sadece beş tanesine odaklanan bir öğrenme yörüngesi ortaya konmuştur. Bu öğrenme yörüngesinin tekrarlanarak geliştirilmesine gereksinim duyulmakla birlikte daha üst düzey sınıflarda geri kalan beş temel geometrik oluşuma dair bilişsel eylemlerin ortaya çıkarılmasını içeren olası öğrenme yörüngelerinin ortaya konmasının gerekliliği açıktır. Bunun yanında temel geometrik oluşumların yansıtılmasını da gerektiren daha karmaşık geometrik oluşumların gerçekleştirilmesini içeren öğrenme ortamlarında öğrencilerin oluşuma dair kavramsal bilgilerinin incelendiği, bilişsel eylemlerinin açığa çıkarıldığı çalışmaların yapılması önerilmektedir. Ayrıca bu veya benzer bir öğrenme yörüngesi esas alınarak temel geometrik oluşumların dinamik geometrik yazılım ortamında inşa edilme sürecine odaklanan çalışmaların gerçekleştirilmesinin alana önemli katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Kaynakça

- Albrecht, W. A. (1952). *A critical and historical study of the role of ruler and compass constructions in the teaching of high school geometry in the United States* (Yayımlanmamış doktora tezi). The Ohio State University, Columbus.
- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools* (Yayımlanmamış doktora tezi). Utrecht University, Netherlands.
- Bakker, A. ve Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping ve N. C. Presmeg (Ed.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* içinde (s. 429-466). Netherlands: Springer.
- Cheung, L. H. (2011). *Enhancing students' ability and interest in geometry learning through geometric constructions* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). The University of Hong Kong, China.
- Chikwere, P. ve Ayama, K. (2016). Teaching of geometric construction in junior high school: An intervention. *Journal of Elementary Education*, 26(1), 139-146.
- Clements, D. H. ve Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. ve Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Çiftçi, O. ve Tatar, E. (2014). Pergel-cetvel ve dinamik bir yazılım kullanımının başarıya etkilerinin karşılaştırılması. *Journal of Computer Education Research*, 2(4), 111-133.
- Djoric, M. ve Janicic, P. (2004). Constructions, instructions, interactions. *Teaching Mathematics and its Applications*, 23(2), 69-88.
- Erduran, A. ve Yeşildere, S. (2010). The use of a compass and straightedge to construct geometric structures. *Elementary Education Online*, 9(1), 331-345.
- Glaser, B. G. ve Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory*. Chicago: Aldine Publishing Company.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), 105-128.
- Gravemeijer, K. ve Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney ve N. Nieveen (Ed.), *Educational design research* içinde (s. 17-51). London: Routledge.
- Gulwani, S., Korthikanti, V. A. ve Tiwari, A. (2011). Synthesizing geometry constructions. *ACM SIGPLAN Notices*, 46(6), 50-61.
- Gür, H. ve Demir, M. K. (2017). Pergel-cetvel kullanarak temel geometrik çizimlerin öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 13(1), 88-110.
- Güven, Y. (2006). *Farklı geometrik çizim yöntemleri kullanımının öğrencilerin başarı, tutum ve van Hiele geometri anlama düzeylerine etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Hogben, L. (2004). *Geometric constructions*. <https://orion.math.iastate.edu/dept/thesisarchive/MSM/LamphierMSMF04pdf.pdf> adresinden erişildi.
- Janičić, P. (2006). GCLC—A tool for constructive euclidean geometry and more than that. A. Iglesias ve N. Takayama (Ed.), *Mathematical Software—ICMS 2006* içinde (s. 58-73). Berlin, Heidelberg: Springer. doi:10.1007/11832225_6
- Karakuş, F. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik inşa etkinliklerine yönelik görüşleri. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, 7(4), 408-435.

- Kellison, A., Bickford, M. ve Constable, R. (2019). Implementing Euclid's straightedge and compass constructions in type theory. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 85(2-4), 175-192.
- Kondratieva, M. (2011). Basic geometric configurations and teaching Euclidean geometry. *Learning and Teaching Mathematics*, 10, 37-43.
- Kondratieva, M. (2013). Geometrical constructions in dynamic and interactive mathematics learning environment. *Online Submission*, 3(3), 50-63.
- Köse, N. Y., Tanışlı, D., Erdoğan, E. Ö. ve Ada, T. Y. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının teknoloji destekli geometri dersindeki geometrik oluşum edinimleri. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(3), 102-121.
- Kunimune, S., Fujita, T. ve Jones, K. (2010). Strengthening students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne ve F. Arzarello (Ed.), *Proceedings of CERME6* içinde (s. 756-765). Lyon: INRP.
- Kuzle, A. (2013). Constructions with various tools in two geometry didactics courses in the United States and Germany. B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the eighth congress of the European society of research in mathematics education* içinde (s. 6-10). Antalya, Turkey.
- Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. *Meaning in mathematics education* içinde (s. 159-179). Berlin: Springer.
- Lim, S. K. (1997). Compass constructions: A vehicle for promoting relational understanding and higher order thinking skills. *The Mathematics Educator*, 2(2), 138-147.
- Lukáč, S. (2010). Investigation and proof of a property of interior angle bisector in a triangle. *The Teaching of Mathematics*, 13, 35-49.
- Martin, G. E. (2012). *Geometric constructions*. Berlin: Springer Science & Business Media.
- Mavrotheris, M. ve Papparistodemou, E. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 385-404.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *İlkokul ve ortaokul matematik dersi öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Napitupulu, B. (2001). *An exploration of students' understanding and van hiele levels of thinking on geometric constructions* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Simon Fraser University, Indonesia.
- Nur, A. S. ve Nurvitasari, E. (2017). Geometry skill analysis in problem solving reviewed from the difference of cognitive style students junior high school. *Journal of Educational Science and Technology*, 3(3), 204-210.
- Öçal, M. F. ve Şimşek, M. (2017). Pergel-çizgeç ve Geogebra inşaları üzerine: Öğretmenlerin geometrik inşa süreçleri ve görüşleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 37(1), 219-262.
- Paksu, A. D. ve Bayram, G. (2019). Altıncı sınıf öğrencilerinin paralel ve dik doğru/doğru parçalarını belirleme ve çizme durumları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 39(1), 115-145.
- Pelczer, I., Singer, F. M. ve Voica, C. (2014). Dynamic thinking and static thinking in problem solving: Do they explain different patterns of students' answers?. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 128, 217-222.
- Plomp, T. (2007). Educational design research: An introduction. N. Nieveen ve T. Plomp (Ed.), *An introduction to educational design research* içinde (s. 9-35). Enschede, the Netherlands: SLO.
- Pratt, D. ve Ainley, J. (1997). The construction of meanings for geometric construction: Two contrasting cases. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(3), 293-322.
- Sanders, C. V. (1998). Geometric constructions: Visualizing and understanding geometry. *Mathematics Teacher*, 91(7), 554-556.
- Sherard, W. H. (1981). Why is geometry a basic skill?. *The Mathematics Teacher*, 74(1), 19-60.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

- Simon, M. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* içinde (s. 272-275). Dordrecht: Springer. doi:10.1007/978-94-007-4978-8_72
- Simon, M. ve Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Smart, J. R. (1998). *Modern geometries* (5. bs.). Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing.
- Stupel, M. ve Ben-Chaim, D. (2013). A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezium: Geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal*, 27(2), 6-24.
- Stylianides, G. J. ve Stylianides, A. J. (2005). Validation of solutions of construction problems in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(1), 31-47.
- Tapan, M. S. ve Arslan, C. (2009). Preservice teachers' use of spatio-visual elements and their level of justification dealing with a geometrical construction problem. *US-China Education Review*, 6(3), 54-60.
- Tosun, N. (2019). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açığortay konusunda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- Ulusoy, F. (2014). Ortaokul matematiğinde paralellik ve diklik kavramları: öğrencilerin sahip olduğu imgeler ve yaşadığı yanlışlar. P. Fettahlıoğlu (Ed.), *XI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi (XI. UFBMEK) bildiri özetleri kitapçığı* içinde (s. 1121-1123). Adana, Türkiye.
- Ulusoy, F. (2016). The role of learners' example spaces in example generation and determination of two parallel and perpendicular line segments. C. Csíkós, A. Rausch ve J. Sztányi (Ed.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* içinde (s. 299-306). Szeged, Hungary.
- Ulusoy, F. (2019). Matematik öğretmeni adaylarının pergel-cetvel ve dinamik geometri yazılımı kullanarak yaptıkları geometrik inşalar. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(2), 336-372.
- Uygun, T. (2016). *Developing mathematical practices in a social context: a hypothetical learning trajectory to support preservice middle school mathematics teachers' learning of triangles* (Yayımlanmamış doktora tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (11. bs.). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, A. (2016). The geometric construction abilities of gifted students in solving real-world problems: A case from Turkey. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 4(4), 53-67.