

Kesirlerde Kavramsal ve İşlemsel Performans

Conceptual and Procedural Performance in Fractions

Çiğdem Haser ve Behiye Ubuz
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Öz

Bu çalışmada öğrencilerin kesirler konusunda sahip oldukları bilgi ve becerileri kavramsal ve işlemsel durumlarda kullanma performansları incelenmiştir. Bu çalışma kapsamında, 14 tane kavramsal ve işlemsel soru içeren sınav hazırlanmış ve Ankara'da bir özel ilköğretim okulunda 5. sınıfta okuyan 145 öğrenciyi uygulanmıştır. Öğrenciler, aynı hedefi farklı durumlarda ölçen kavramsal performansa yönelik sorularda, sorunun içerdiği kesir çeşitlerine göre farklı performans göstermişlerdir. İşlemsel performansa yönelik sorularda ise farklı tipte kesirler arasındaki çarpma ve çıkarma işlemlerinde, toplama işlemine kıyasla daha düşük performans göstermişlerdir.

Anahtar Sözcükler: Kesirler, performans, kavramsal ve işlemsel zorluklar

Abstract

This study investigates the performances of the students in using knowledge and skills on conceptual and computational tasks using fractions. An essay type test including 14 conceptual and computational questions was developed and administered to 145 5th grade students who were studying in a private elementary school in Ankara. Students performed differently in questions, which were related to the same conceptual objective, according to the types of fractions they include. In the computational questions, performance in subtraction and multiplication of different kinds of fractions was lower than the performance in addition of different kinds of fractions.

Key Words: Fractions, performance, conceptual and computational difficulties

Giriş

Kesirler ilköğretim matematiğinin en soyut konusudur (Booker, 1996) ve ilköğretim matematik programında yer alan birçok konuya (ondalık sayılar, rasyonel sayılar, oran, orantı ve ölçüler) temel teşkil etmektedir. Önceki çalışmalar, öğrencilerin kesirler konusunda her seviyede temel kavramları anlama zorluğu çektiklerini göstermiştir (Aksu, 1997; Hart, 1993; Leinhardt ve Smith, 1984; Newstead ve Murray, 1998; Orton ve Frobisher, 1996). Kavramlar ve gösterimler arasındaki karmaşık ilişkiler (Leinhardt ve Smith, 1984), ortaya

çıkan yeni kurallar (Hart, 1993) kesirler konusunda zorlukların ve kavram yanlışlarının temelini oluşturmaktadır.

Kesirler konusundaki kavramların öğretilmesi sırasında kullanılan birçok gösterim vardır. Bunlardan ilki alan ya da bütün-parça gösterimidir. Eşit parçalara ayrılmış bir bütün ya da ayrık eş parçalardan oluşan kümeler bu gösterimde yer almaktadır (Orton ve Frobisher, 1996; Behr ve Post, 1992; Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983). Alan gösteriminde öğrenciler, aynı kesrin farklı şekillerde gösteriminde (Orton ve Frobisher, 1996) ve eş parçalardan oluşan kümelerin ifade ettiği kesirleri anlamakta (Behr ve diğerleri, 1983) zorluk çekmektedirler.

Kesirlerin sayı doğrusu ile gösteriminde izlenen yol, tamsayılardan kesir sayılarına geçiş yapmak şeklindedir (Orthon ve Frobisher, 1996). Bu gösterimde karşılaşılan

Araş. Gör. Çiğdem Haser, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İlköğretim Bölümü, chaser@metu.edu.tr Doç. Dr. Behiye Ubuz, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, behiye@tutor.fedu.metu.edu.tr.

problemler sayı doğrusu üzerindeki eş uzunlukta parçaların sayısı ile kesrin paydasının eşit olmaması ve benzer yerlere sahip kesirlerin adlandırılmasıdır (Hart, 1993; Hiebert ve Tonnessen, 1978). Bu gösterimde karşılaşılan problemlerden biri, sayı doğrusu üzerinde verilen noktaya denk gelen kesrin doğru adlandırılmasıdır (Bright, Behr, Post ve Wachsmuth, 1988).

Kesirler konusunda öğretilen kavram ve kuralların yeteri kadar anlaşılmasından dolayı (Hart, 1993) öğrenciler tamsayılarda edindikleri bilgi ve deneyimleri kesirler konusunda uygulamaktadır (Booker, 1996). Bu konuda yaşanan zorlukların en iyi gözlemlendiği durumlardan birisi kesirlerin sıralanmasıdır. Birim kesirlerin ve payı eşit olan kesirlerin sıralanmasında paydası büyük olan kesirler bazı öğrenciler tarafından büyük kabul edilmektedir (Behr ve Post, 1992; Hart, 1993). Payı ve paydası eşit olmayan kesirlerde ise öğrenciler kesirlerin içerdiği sayıların büyüklüklerine göre hangi kesrin büyük olduğuna karar vermektedirler (Mack, 1990). Birçok çalışma göstermiştir ki (D'Ambrosio ve Mewborn, 1994; Oliveira ve Ramalho, 1994) öğrencilerden iki kesri toplamaları istendiğinde pay ve paydayı ayrı ayrı toplamaktadırlar. Bunun nedeni, öğrencilerin bir kesri kendi başına bir değeri olan bir sayı olarak değil de farklı değere sahip iki (ayrık) sayı olarak algılamalarıdır (Behr ve Post, 1992; Newstead ve Murray, 1998).

Kesirler konusu ilköğretim matematiğinin ilk soyut konularından biri olması ve başka konulara temel teşkil etmesinden dolayı bu alanda araştırma yapılması gereği duyulmuştur. Türkiye'de kesirler konusunda sadece 6. sınıf seviyesinde nicel ağırlıklı bir çalışmaya rastlanmıştır (Aksu, 1997). Aksu'nun çalışmasında kesirlerde kavramsal ve işlemsel durumlar ile problem çözmeye öğrenci performans farklılıkları kısa yanıtı üç yazılı sınav ile araştırılmış, bu üç sınav istatistiksel analizler ile değerlendirilmiştir. Bu çalışmada ise 5. sınıf ilköğretim öğrencilerinin kesirler konusunu nasıl öğrendikleri nitel ve nicel olarak incelenmektedir. Matematik eğitiminde, öğrencilerin bir kavramı nasıl ve ne derece anladıklarını ve bu kavrama ilişkin hatalarını nicel olarak incelemek, öğretim programlarını ve yöntemlerini sağlıklı belirlemek açısından önemlidir (Douglass ve Russel, 2000). Bu araştırmanın sonuçları ileride yapılacak tamamen nitel araştırmalara yardımcı olacaktır.

Yöntem

Örneklem

Bu çalışmaya Ankara İli'nde bir özel ilköğretim okulunun bütün 5. sınıf şubelerinde okuyan 145 öğrencisi katılmıştır.

Bilgi Toplama Aracı

Bu çalışmada kullanılan bilgi toplama aracı ilköğretim 5. sınıf düzeyinde kesirler konusunda kavram ve işlem performansı ölçen 14 adet sorudan oluşan bir performans sınavıdır (PS) (Bakınız Ek-A). Sınavın içerdiği konular: kesir çeşitleri ve özellikleri; kesirlerin gösterimleri; bileşik ve tamsayılı kesirler arasındaki ilişkiler; kesirlerin denkliliği; kesirlerin sıralanması ve kesirlerde işlemlerdir. Sınav sorularından dokuzu çeşitli sayıda şıklar içerdiğinden sınav toplam 41 soru üzerinden değerlendirilmiştir.

Sorulara göre hedeflerin dağılımı Tablo 1'de verilmektedir. Hedefler, Bloom (1956) taksonomisinde bilgi (A), kavrama (B) ve uygulama (C) boyutlarına göre yazılmıştır.

Geliştirilen PS'nin güvenilirliği Kuder-Richardson formülü ile 0.89 olarak hesaplanmıştır. PS'nin verilmesinden bir hafta önce öğrencilere öğretmenleri tarafından kesirler konusunda iki kısa sınav uygulanmıştır. Birinci sınav, kesir çeşitleri, kesirlerin sıralanması ve sayı doğrusu üzerinde gösterimi ile kesirlerle işlemleri; ikinci sınav ise kesir problemlerini içermektedir. PS'nin Sınav I ve Sınav II ile korelasyonları 0.01 manidarlık seviyesinde sırasıyla 0.58 ve 0.65 olarak anlamlı bulunmuştur. Bu da göstermektedir ki PS benzer ölçüm araçları ile aynı öğrenci davranışını ölçmektedir.

Sınavın geçerliliğinin belirlenmesi amacıyla sınav soruları matematik eğitimi alanında çalışan akademisyenlere ve başka ilköğretim okullarında çalışan öğretmenlere gösterilmiş, sınav sorularının 5. sınıf seviyesine uygun olduğu saptanmıştır.

İşlem

Bu çalışmada kullanılan yazılı sınav, literatür taramasında elde edilen bulgular ve ilköğretim matematik eğitimi programında belirtilen hedefler doğrultusunda geliştirilmiştir.

41 sorudan oluşan PS, her doğru yanıt için 1 puan, her yanlış yanıt için 0 puan verilerek değerlendirilmiştir.

Tablo 1
Hedefler ve Hedeflerin Sorulara Göre Dağılımı

Hedefler	Sorular
A1. Farklı kesir çeşitlerini belirtme.	2
B1. Verilen bir duruma ait kesri yazma.	1
B2. Bir grup kesir arasından denk kesir çiftlerini bulma.	7
B3. Bir kesre denk olan kesri bulma.	12
B4. Alan ya da küme gösterimlerinin kesir belirtip belirtmediğini anlama.	4
B5. Eş parçalara ayırma ile tanımlanmış kesirleri yazma.	2, 3
B6. Paydaları eşit iki kesri karşılaştırma.	9b
B7. Payları eşit iki kesri karşılaştırma.	9a
B8. Pay ya da paydaları eşit olarak verilen en çok beş kesri büyüklük veya küçüklük sırasına koyma.	9c, 9d
B9. Alan ya da küme (eş ayrıklı parça) gösterimi ile verilen bir kesri yazma.	13
B10. Bir kesri alan ya da küme gösterimi ile belirtme.	12, 13
B11. Üç eşit kesrin toplamı olarak verilen bir kesri çarpım olarak ifade etme.	13
C1. Bir sayı doğrusu üzerinde gösterilen kesirleri yazma.	8
C2. Verilen bir kesirden küçük ya da büyük kesir yazma.	10
C3. Bir bileşik kesri bir tamsayılı kesre çevirme.	5
C4. Bir tamsayılı kesri bir bileşik kesre çevirme.	6
C5. Paydaları birbirine eşit üç basit kesri toplama.	13
C6. Paydaları birbirine eşit olmayan ve biri diğer ikisinin katı olan birer sayma sayısı olan üç basit kesri toplama.	11a
C7. Paydaları birbirine eşit olmayan ve biri diğerinin katı olmayan birer sayma sayısı olan iki farklı çeşit kesri toplama.	11b
C8. Paydaları birbirine eşit olmayan ve biri diğerinin katı olmayan birer sayma sayısı olan iki farklı çeşit kesir arasındaki çıkartma işlemi yapma.	11c
C9. Paydaları birbirine eşit olmayan ve biri diğerinin katı olmayan birer tamsayı olan iki basit kesir arasındaki çıkartma işlemi yapma.	11d
C10. İki farklı kesir arasındaki çıkarma işleminde bilinmeyen terimi bulma.	12
C11. Farklı çeşitteki kesirleri çarpma.	11f, 11g
C12. Bir tamsayılı kesri bir tamsayı ile çarpma.	11e
C13. Bir sayma sayısı ile bir kesrin çarpımını içeren işlemde bilinmeyen sayma sayısını hesaplama.	14

Analizler için SPSS 8.0 bilgisayar programı kullanılmıştır.

Bu çalışmada öğrencilerin kesirler konusunda sahip oldukları bilgi ve becerileri kavramsal ve işlemsel durumlarda kullanma performanslarını incelemek için soru bazında hedef dağılımı ve öğrencilerin sorulara verdikleri doğru ve yanlış yanıtlara göre yüzde dağılımı yapılmıştır. Ayrıca her soruda yapılan hatalar, öğrencilerin kesirlerle ilgili kavramları nasıl oluşturduğunu anlamak için detaylı bir şekilde incelenmiş ve yorumlanmıştır.

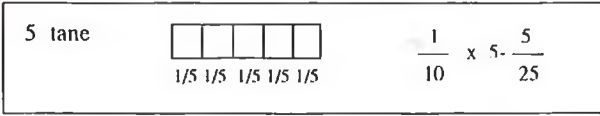
Bulgular

41 üzerinden değerlendirilen PS'nin ortalaması 23.06 ve standart sapması 7.8 olarak bulunmuştur. En düşük puan 5 en yüksek puan ise 39'dur.

Bulgular incelendiğinde kavramsal performansa yönelik olan ve aynı hedefi ölçen farklı sorularda öğrencilerin farklı performans gösterdikleri belirlenmiştir. Örneğin, farklı kesir çeşitlerini belirtme hedefine yönelik 1. soruda öğrencilerin (c) şıkkındaki performansı (%32) (a) ve (b) şıklarındaki performanslarından (%73 ve %79) oldukça düşüktür. Öğrencilerden pay ve

paydasının toplamı 19 olan bir tamsayı kesir yazmaları istenen soruda, yanlış verilen yanıtlardaki genel eğilim pay, payda ve tam kısmının toplamı 19 olan bir kesir yazmak şeklindedir: $1 \frac{8}{10}$, $8 \frac{1}{10}$

Kesirlerin eş parçalara ayrılması kuralına yönelik 3. soruda öğrencilerin bu kuralı göz ardı ettikleri ve çoğu zaman işlem kullanmadan sonucu yazdıkları görülmüştür. En çok verilen yanlış yanıt 5'tir (Bakınız Şekil 1). Burada, öğrenciler 5'i "bir bütün" olarak algılamışlar, verdikleri şekillerde ve yaptıkları işlemlerde de bir bütün üzerinden hareket etmişlerdir. Verilen diğer bir yanıt ise 1'dir. Bu yanıt verilirken $5:5=1$ işlemi kullanılmıştır. Öğrenci için "bir bütün" kavramının gösterim açısından "birkaç bütün" kavramından daha kolay olması ve sorunun tamsayı kesirlerde genel olarak sorulan soru tiplerinden farklı olması, bu soruda düşük performansa (%20) neden olmuştur.



Şekil 1.3. Soruya verilen yanlış yanıtlardan bir örnek

Verilen alan ya da küme gösterimlerinin kesir belirtip belirtmediğini anlamayı ölçen 4. sorunun (a), (b) ve (c) şıklarında alan gösterimi, (d) ve (e) şıklarında ise eş ayrı parçalardan oluşan küme gösterimi üzerinde durulmuştur. Alan gösterimindeki en düşük performans, eş parçalara ayrılmış gibi görünen ancak gerçekte kesir belirtmeyen bir şeklin verildiği (b) şıkında (%55) görülmüştür. (c) şıkında da eş parçalara ayrılmadığı daha kolay anlaşılabilen bir şekil verilmiştir. Bu şıktaki performans (b) şıkkına oranla daha yüksektir (%77). Ancak, verilen yanlış yanıtlar öğrencilerin kesir kavramı ve gösterimleri arasında ilişki kurmakta zorlandıklarını ortaya koymuştur. Eş ayrı parçalardan oluşan küme gösterimine yönelik (e) şıkında, verilen kümedeki parçaların tamamı birbirine eş değildir. Kesir belirtmeyen bu gösterimde öğrencilerin performansı (%70), kesir belirten (d) şıkkından (%95) düşüktür.

Bileşik ve tamsayı kesirler arasındaki geçişleri içeren 5. ve 6. sorularda performans yüzdeleri genel olarak birbirine yakındır (5. soru için: (a) %78 ve (b) %72; 6. soru için (a) %67 ve (b) %74). Bu da göstermektedir ki bileşik kesirden tamsayı kesre ve

tamsayı kesirden bileşik kesre geçiş aynı zorluktur. Bileşik kesri tamsayı kesre çevirirken öğrencilerin izledikleri yanlış yöntemler şöyle özetlenebilir:

- Paydadaki iki basamaklı sayının onlar basamağını tamsayı kısmına, birler basamağını pay kısmına yazmak: $\frac{23}{10} = 2 \frac{3}{9}$
- Payı paydaya böldükten sonra kalanı tamsayı kısmına, bölümü ise paya yazmak: $\frac{23}{9} = 5 \frac{2}{9}$

Tamsayı kesirleri bileşik kesre çevirirken izlenen yanlış yöntemler ise şu şekildedir:

- Kesrin tamsayı kısmını, paydaki sayının yanına yazarak payda, paydadan büyük bir sayı oluşturmak: $3 \frac{2}{9} = \frac{32}{15}$
- Kesrin tamsayı kısmındaki rakamı hem pay hem de paydayla çarpıp oluşan basit kesri yazmak: $3 \frac{2}{15} = \frac{6}{45}$
- Kesrin tamsayı kısmındaki sayı ile paydasındaki sayıyı sadeleştirmek ve oluşan kesri yazmak: $3 \frac{2}{15} = \frac{2}{5}$

Bahsedilen yöntemlerin bir kısmında, sonuç bileşik kesir olmamasına rağmen, öğrenciler bu sonucu yanıt olarak belirtmişlerdir. Sonucu kontrol etmeme ve kesir çeşitlerine dair bilginin kullanılmaması bu şekilde verilen yanlış yanıtların nedenini oluşturmaktadır.

Bir grup kesir içinden denk kesirleri bulmayı ölçen 7. soruda genel performans %50'den düşüktür. Öğrenciler, verdikleri yanlış yanıtlarda aşağıdaki özellikleri sağlayan kesir çiftlerini denk olarak göstermişlerdir:

- Kesirlerin sadece paylarının birbirinin katı/aynısı olması:
- Kesirlerin sadece paydaların birbirinin katı/aynısı olması: $\frac{4}{15} \equiv \frac{8}{18} \equiv \frac{4}{9} \equiv \frac{4}{14}$
- Kesirlerde pay ile paydanın yer değiştirmiş olması: $\frac{21}{15} \equiv \frac{8}{18} \equiv \frac{4}{9} \equiv \frac{21}{18}$
- Karşılaştırılan kesirlerde payların ve paydaların birbirinin katı olması: $\frac{9}{7} \equiv \frac{7}{9}$

Sayı doğrusu üzerinde kesirlerin gösterimini ölçen 8. soruda öğrencilerin genel performansı oldukça yüksektir. Ancak, 1'den küçük kesirlerin gösterimindeki

performans (%83) 1'den büyük kesirlerin gösteriminden daha yüksektir (%71). Öğrenciler sayı doğrusu üzerinde 1'den büyük kesirleri yazarken 1 noktasını 0 kabul ederek istenen kesirleri birer basit kesir halinde yazmışlardır. Örneğin $\frac{9}{8}$ kesri yerine $\frac{1}{8}$ yazmak. Doğru yanıtlarda 1'den büyük kesirleri göstermedeki genel eğilim ise tamsayı kesir kullanma yönündedir.

9. ve 10. sorular kesirlerin büyüklüklerine göre sıralanmasını ve sıralanmış kesirlerde eksik terimin bulunmasını içermektedir. 9. soruda öğrencilerin (a) ve (d) şıklarındaki payı eşit paydası farklı kesirlerin büyüklüğüne göre sıralama yapma performansları (%62 ve %52), (b) ve (c) şıklarındaki payı farklı paydası eşit kesirlerdeki sıralama performanslarına (%81 ve %69) göre daha düşüktür. En sık rastlanılan yanlış yanıt büyüklüğe göre sıralama sırasında yanlış işaretin kullanılmasıdır. 10. soruda öğrenciler, paydası eşit kesirlerde verilmiş sıralamaya göre eksik terimi bulmada yüksek performans göstermişlerdir (%84 ve %78). Payı ve paydası birbirine eşit olmayan kesirlerde ise performans yüzdesi düşüktür (%54 ve %39). Özellikle kesirlerden birinin paydasının vermediği (b) şığında öğrencilerin 5 ya da 5'ten büyük sayıları yanıt olarak verdikleri gözlemlenmiştir. Örneğin, $\frac{8}{5} > \frac{8}{5}$ veya $\frac{8}{7} > \frac{8}{5}$. Her iki sorudan elde edilen yanıtlar göstermiştir ki öğrenciler küçüklük-büüklük işaretlerini ve bu işaretleri nasıl kullanacaklarını tam olarak kavrayamamışlardır. Her iki soruya verdikleri yanıtlar göz önüne alındığında, öğrencilerin öğrendikleri çeşitli yöntemleri yalnızca belli tipteki sorularda kullandıkları, aynı yöntemleri kullanmayı gerektiren farklı tipteki sorularda bu yöntemleri ezbere kullanma veya kendilerince mantıklı birtakım yöntemler kullanma eğiliminde oldukları gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin kesirler içeren toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini yapma performansına yönelik 11. soruda çarpma işlemi ile farklı kesir çeşitleri içeren çıkarma işlemini yapma performansları oldukça düşüktür (%30'dan az). Toplama işlemine yönelik (a) ve (b) şıklarında payların toplamını sonuç kesrin payına, paydaların toplamını da paydasına ve kesrin tamsayısını da tamsayı kısmına yazma eğilimi sıkça görülmüştür (Bakınız Şekil 2).

$$\frac{9}{8} + \frac{1}{8} + \frac{8}{12} = \frac{18}{44}$$

Şekil 2. 11. Soruya verilen yanlış yanıtlardan bir örnek

Buna ek olarak, öğrencilerin toplama işlemi sırasında payda eşitleyen, sadece paydaları çarptıkları, payları ise çarpmadan topladıkları gözlemlenmiştir. Çıkarma işlemine yönelik (c) ve (d) şıklarında iki basit kesir içeren (c) şığında performans yüksektir (%71). Toplama işlemi için belirtilen öğrenci eğilimleri, çıkarma işlemindeki yanlış yanıtların nedenini oluşturmaktadır. Bir tamsayı kesrin bileşik kesre, bileşik kesrin de tamsayı kesre çevrilememesi ve payda eşitleme sırasında öğrencilerin payı çarpmayı unutulmaları (d) şığında performansın düşmesine neden olmuştur (%25). Bir tamsayı ile bir tamsayı kesrin çarpımında öğrenciler tamsayı ile kesrin tamsayı kısmını çarpmışlar ve kesir kısmı ile ilgili bir işlem yapmamışlardır. Örneğin, $14 \times 9 \frac{3}{17} = 126 \frac{3}{17}$

işlemi kesir içeren çarpma işlemlerinde performansın düşük olması büyük oranda öğrencilerin kesirlerin paydalarını eşitlemiş olmalarından kaynaklanmıştır. Bu işlemden sonra da normal kesir çarpmasını uygulamışlardır. Bunun yanı sıra öğrencilerin kesirleri sadeleştirirken yaptıkları yanlışlar, düşük performansa neden olmuştur. Örneğin, payları kendi aralarında, paydaları kendi aralarında sadeleştirme, ya da tamsayı kesirde tam kısmı pay ya da paydayla sadeleştirme. Bir tamsayı kesri bileşik kesre çevirmeden işlem yapma sıkça görülen bir hatadır. Çarpma işlemi ile ilgili olarak bir sayma sayısı ile bir kesrin çarpımında eksik sayma sayısını bulmaya dayalı 14. soruda, performans yüzdesi son derece düşüktür (%8). Öğrencilerin kesirlerin sadeleştirilmesindeki kavram yanlışları bu sorudaki performans düşüklüğünün temel nedenidir. Bu soruda öğrencilerin verdikleri yanıtların doğruluğunu kontrol etmedikleri ya da yanlış kontrol ettikleri de görülmüştür.

Birden fazla hedef içeren 2., 12., ve 13. sorular detaylı bir şekilde hedef bazında incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmıştır.

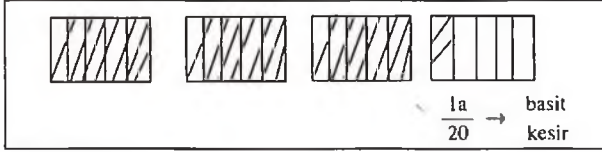
Eş parçalara ayrılmış kesirleri yazma (A1) ve kesir çeşidini belirtmekle (B5) hedefleri ile ilgili olan 2. soruda hedef bazında yüzde dağılımı Tablo 2'te verilmektedir.

Tablo 2.2

Soruda Hedef Bazında Öğrencilerin Verdikleri Yanıtlara Göre Yüzde Dağılımı

	Doğru	Yanlış
A1	30	48
B5	51	10
A1+B5	23	55

Bu soruda öğrencilerin büyük çoğunluğu eş parçalara bölünen dört bütünü toplam bir bütün olarak algılamışlardır. Öğrencilerin düşüncü yolu ise dört bütünü her birini beş eşit parçaya bölüp ortaya çıkan eş parçaların oluşturduğu küme üzerinde 16 parçayı belirleyip toplam kümeye oranını kesir olarak yazmak şeklindedir (Bakınız Şekil 3).



Şekil 3.2. Soruya verilen yanlış yanıtlardan bir örnek

Soru içerisinde verilen "dört bütün" kavramını görsel olarak doğru ifade eden öğrenciler buna rağmen kesri yanlış belirtmişlerdir. Bu gösterimi veren öğrencilerin bir kısmı soruyu doğru yanıtlamış, bir kısmı da bileşik kesir ve tamsayılı kesir kavramlarını karıştırarak sonucu $3\frac{16}{7}$ şeklinde yanıtlamıştır. İlk hedefe doğru ya da yanlış yanıt veren öğrencilerin büyük bir kısmı yazdıkları kesrin çeşidini doğru belirtmişlerdir.

Kesir içeren bir çıkarma işleminde çıkan terimin bulunması (C10), sonuca denk kesrin bulunması (B3) ve eş parçalardan oluşmuş küme üzerinde bu kesrin denk kesrinin gösterilmesi (B10) hedefleri ile ilgili 12. soruda her hedef için performans yüzdeleri Tablo 3'te görülmektedir.

Bazı öğrenciler çıkarma işleminde eksik terimi bulmak için 2'yi $1\frac{7}{7}$ olarak tam sayı şeklinde belirtmişler ve $\frac{10}{7}$ 'yi de tamsayılı kesre çevirerek çıkan terimi bulmaya çalışmışlardır. Fakat işleminde tamsayıları işleme almayarak sonucu $1\frac{4}{7}$ olarak bulmuşlardır. Yukarıda bahsedilen işlemi 2'yi bileşik kesre çevirip

Tablo 3. 12

Soruda Hedef Bazında Öğrencilerin Verdikleri Yanıtlara Göre Yüzde Dağılımı

	Doğru	Yanlış
C10	35	21
B3	18	10
B10	18	31
C10+B3+B10	17	39

gerçekleştirenler ise doğru sonuca ulaşmışlardır. Sonucu olarak $\frac{4}{7}$ bulan öğrencilerin bir kısmı, sonucu verilen şekil üzerinde ifade etmek için bu kesrin denk kesrini bulmaları gerektiğini anlamışlar ve denk kesri bulmuşlardır. Denk kesri bulmanın gerekliliğini göremeyen öğrenciler ise $\frac{4}{7}$ kesrini şekilde verilen 21 daireden 4'tünü karalayarak belirtmişlerdir. Bu şekilde gösterilen kesir $\frac{4}{7}$ 'yi değil, $\frac{4}{21}$ 'i göstermektedir. Çıkarma işlemini yanlış yapan öğrencilerin bir kısmı da buldukları kesrin denk kesrini bulmadan, sonucu şekil üzerinde ifade etmişlerdir.

Şekille verilen kesirlerin belirtilmesini (B9), kesirlerin toplamını (C5) ve bu toplamı hem şekil üzerinde (B11) hem de başka bir işlemle (B10) yapılmasını hedefleyen 13. soruda performans yüzdeleri Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. 13

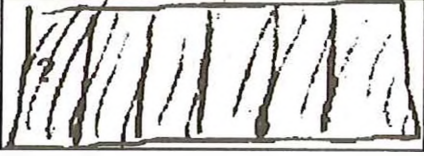
Soruda Hedef Bazında Öğrencilerin Verdikleri Yanıtlara Göre Yüzde Dağılımı

	Doğru	Yanlış
B9	76	11
C5	77	9
B11	37	14
B10	17	15
B9+C5+B11+B10	11	77

Tablo 4'te görüldüğü gibi öğrencilerin çoğu, şekille verilen kesirleri doğru belirtmişlerdir. Kesirleri yanlış belirten öğrenciler, bu kesirler üzerinden yaptıkları işlemleri doğru yapmışlardır. İşlemi farklı bir işlem kullanarak ifade etme performansı düşüktür.

Öğrencilerin bir kısmı bu soruyu, $3x\frac{4}{7}$ olarak yanıtladı.

mak yerine aynı sonucu veren başka kesirlerin toplamını göstererek yanıtlamıştır. Örneğin, $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$. Sonucun şekille gösteriminde ise performans oldukça düşüktür. Genel olarak yapılan yanlış soruda toplam altı parçanın karalı olmasından yola çıkılarak bir bütünün altı eşit parçaya bölünüp bütün parçaların taranması şeklindedir (Bakınız Şekil 4). Öğrencilerin bu soruları yanıtlarken her adımda bir önceki adımın sonuçlarına dikkat etmedikleri görülmüştür.



Şekil 4. 13. soruya verilen yanlış yanıtlardan bir örnek

Sonuçlar ve Yorumlar

Bu araştırma kapsamında uygulanan PS'nin sonuçları incelendiğinde, öğrencilerin aynı hedefi farklı durumlarda ölçen kavramsal performansa yönelik sorularda, sorunun içerdiği kesir çeşitlerine göre farklı performans gösterdikleri, tamsayılı kesir içeren sorularda ise en düşük performans gösterdikleri görülmüştür. Tamsayılı kesir içeren diğer kavramsal sorularda gösterdikleri performans da düşüktür. İşlemsel performansa yönelik sorularda ise farklı tipte kesirler arasındaki çarpma ve çıkarma işlemlerinde, toplama işlemine kıyasla daha düşük performans göstermişlerdir. Birden fazla hedef içeren sorularda öğrencilerin birbiri ardına gelen hedefler arası geçişlerde sorun yaşadıkları, bir önceki adımda ortaya çıkan sonuç ile bir sonraki adımı uygun olarak birleştiremedikleri görülmüştür.

Öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlar daha detaylı incelendiğinde öğrencilerin kesir tanımı ve gösterimleri ile ilgili durumlarda eş parçalara ayırma kuralını göz ardı ettikleri görülmüştür. Özellikle birden fazla bütün içeren sorularda öğrencilerin verdikleri gösterimler ve belirttikleri kesirler arasında tutarsızlıklar vardır. Kesir çeşitleri arasındaki geçişlerde öğrenciler kendi buldukları birtakım yöntemleri kullanmışlar ve sonuçta elde ettikleri kesrin istenilen kesre uygunluğunu kontrol etmemişlerdir. Kesirlerde denklik kavramının tam olarak anlaşılmadığı, öğrencilerin büyük çoğunlukla benzer terimlerden hareket ederek denklik gösterdikleri görülmüştür. Paydası farklı kesirlerin sıralanması ile

ilgili durumlarda öğrenciler zorluk yaşamışlardır. Öğrencilerin, kesirlerle çarpma, toplama ve çıkarma yapmaya yönelik sorularda doğal sayılarda edindikleri işlem alışkanlıklarını devam ettirme eğilimleri gözlenmiştir. Tamsayılı kesirler ile bileşik kesirleri içeren işlemlerde zorluklar yaşadıkları görülmüştür.

Öneriler

Bu araştırma sonunda elde edilen sonuçlar göstermektedir ki kesirler konusunun öğretiminde şu hususlara dikkat edilmelidir:

- Sınıflarda, öğrencileri farklı düşünmeye teşvik eden örnekler çözülmesi ve bu tip alıştırmalara ve problemlere ağırlık verilmesi;
- Kesirlerin eş parçalara ayrılmış küme ile gösterimine alan gösterimi kadar ağırlık verilmesi;
- Denk kesirlerin gösteriminde alan ve küme gösterimlerinin daha sıklıkla kullanılması;
- Öğrencilere özellikle birden fazla bütün içeren kesir gösterimleri ve bu kesirlerle ilgili kavramsal bilgilerini uygulayacakları çalışmalar içeren etkinlikler ve alıştırmalar verilmesi;
- Kesirlerde yeni kurallar öğretilirken sık görülen hatalara da örnekler verilmesi ve öğrencilere kuralın doğru ve hatalı uygulamaları arasındaki farkların kavratılması;
- Kesirler içeren işlemlerde yeni kuralların verilmesi sırasında şekil kullanımı ile hatalı işlemlerin ne ifade ettiğinin üzerinde durulması;
- Tamsayılı kesir içeren işlemlerde uygun işlem yollarının kavratılması.

Kesirlerin denkliği İlköğretim Matematik Eğitimi Programı'nda ayrı bir konu olarak verilmektedir (MEB, 1998). Halbuki denklik, paydası farklı kesirler içeren toplama ve çıkarma işlemlerinde sıkça kullanılan bir kavramdır. Bu nedenle kesirlerin denkliğinin apayrı bir konu olarak değil, daha genel konuların içinde onlarla ilgili olarak verilmesi gerekmektedir (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993). Ayrıca, sonucun kontrol edilmemesi ile ortaya çıkan yanlış yanıtlar, genel olarak matematik eğitiminde bu alışkanlığın da kavratılması gerekliliğini göstermiştir.

Kesirler konusu üzerine daha fazla sayıda nitel araştırmalar yapmak, bu konunun öğretiminde ve konu ile ilgili daha yüksek seviyedeki konularda ortaya çıkan sorunların giderilmesinde faydalı olacaktır.

Kaynakça

- Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research*, 90 (6), 375-380.
- Behr, M.J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 296-333). New York: MacMillan.
- Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R. & Silver, E.A. (1983). Rational-number concept. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and skills* (pp. 91-126). New York: Academic Press.
- Behr, M.J. & Post, T.R. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T.R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods* (pp. 201-248). Needham Hights, Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Bloom, B.S., (1956). *Taxonomy of educational objectives: Handbook I, cognitive domain*. New York: Longmans.
- Booker, G. (1996). Constructing mathematical conventions formed by the abstraction and generalisation of earlier ideas: The development of initial fraction ideas. In L.Steff, P. Cobb & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematics learning*, Hillsdale, (pp. 381-395). NJ: Earlbaum
- Bright, G.W, Behr, M.J., Post, T.R. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (3), 215-232.
- D'Ambrosio, B. & Mewborn, D. (1994). Children's construction of fractions, and their implications for classroom instruction. *Journal of Research in Childhood Education*, 8 (2), 150-161.
- Douglass, C. & Russel, G. (2000). The nature and roles of research in improving achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (2), 168-173.
- Hart, K.M. (1993). Fractions. In K.M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, (pp. 66-81). John Murray.
- Hiebert, J. & Tonnessen, L.H. (1978). Development of the fraction concept in two physical contexts: An explanatory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9 (5), 374-378.
- Leinhardt, G. & Smith, D. (1984). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 77 (3), 247-271.
- Mack, N.K. (1990). Learning fraction with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (1), 13-32.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), (1998). *İlköğretim okulu matematik dersi öğretim programı 4-5. sınıflar*. Ankara: MEB.
- Newstead, K. & Murray, H. (1998). Young student's construction of fractions. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol.3, pp. 295-302). Stellenbosh: South Africa.
- Oliveira, I. & Ramalho, G. (1994). Rational numbers: strategies and misconceptions in sixth grade students. *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Education* (Vol.3, pp. 392-398). Lisbon: Portugal.
- Orton, A. & Frobisher, L. (1996). *Introduction to education – insights into teaching mathematics*. Cassell.

Geliş	19 Kasım 2001
İnceleme	24 Mayıs 2002
Kabul	20 Eylül 2002

EK A. Kesirler Konusunda Kavramsal ve İşlemsel Performans Sınavı

- Pay ve paydasının toplamı 19 olan: (a) Bir basit kesir; (b) Bir bileşik kesir; (c) Bir tamsayı kesir yazınız.
- 4 bütünü her biri 5 eşit parçaya bölünüp parçalardan 16 tanesi alınmıştır. Oluşan kesri ve çeşidini yazınız.
- 5 sayısının içinde kaç tane $\frac{1}{5}$ vardır?
- Aşağıda verilen şekil ve çokluklardaki taralı kısımları kesir ile ifade ediniz. Eğer ifade edemiyorsanız nedenini açıklayınız.



- Verilen bileşik kesirleri tamsayı kesre çeviriniz:
 - $\frac{23}{9} =$
 - $\frac{37}{7} =$
- Verilen tamsayı kesirleri bileşik kesre çeviriniz:
 - $3\frac{2}{15} =$
 - $2\frac{3}{22} =$
- Verilen kesirlerden birbirine denk olanları gösteriniz: $\frac{21}{18}, \frac{4}{9}, \frac{10}{4}, \frac{2}{7}, \frac{9}{7}, \frac{7}{9}, \frac{8}{18}, \frac{4}{14}$
- Sayı doğrusu üzerinde verilen A, B, C, D ve E noktalarının gösterdikleri kesirleri yazınız.



9. Verilen kesirleri < veya > sembollerinden uygun olanını yazarak sıralayınız. (c ve d şıklarında kesirlerin yerlerini değiştirebilirsiniz):

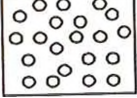
a) $\frac{13}{33}$, $\frac{13}{26}$ b) $\frac{4}{14}$, $\frac{6}{14}$ c) $\frac{5}{22}$, $\frac{12}{22}$, $\frac{3}{22}$, $\frac{11}{22}$ d) $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{38}$, $\frac{7}{21}$

10. Büyüklük veya küçüklük sırasına göre sıralanmış kesirler verilmiştir. Boşlukları sıralamalar bozulmayacak şekilde uygun doğal sayılarla doldurunuz:

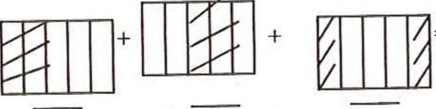
a) $\frac{7}{7} < \frac{13}{33}$ b) $\frac{7}{7} < \frac{8}{5}$ c) $\frac{7}{30} < \frac{15}{33}$ d) $\frac{6}{9} > \frac{7}{33}$

11. Verilen işlemleri yapınız:

a) $\frac{9}{24} + \frac{1}{8} + \frac{8}{12} =$ b) $3\frac{1}{9} + \frac{7}{6} =$ c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{9} =$
d) $4\frac{3}{7} - \frac{49}{14} =$ e) $14 \times 9\frac{3}{17}$ f) $\frac{7}{3} \times \frac{4}{21}$ g) $2\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

12.  $= \frac{10}{7}$

Yukarıdaki çıkarma işleminde çıkan kesir bilinmiyor. Çıkan kesri bulunuz ve verilen çokluk üzerinde gösteriniz.

13.  = ?

Şekillerle gösterilen işlemin sonucunu bulunuz. Bu işlemi farklı bir işlem kullanarak ifade ediniz. Sonucu şekille gösteriniz.

14. $\square \times \frac{15}{12}$ işleminden elde edilen sayının 7'den küçük bir tamsayı olabilmesi için boş kutuya hangi sayı konmalıdır?