

Dörtgenlerde Aile İlişkilerinin Yapılandırılması: İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Ders Planlarının Analizi

Elif TÜRNÜKLÜ¹
Dokuz Eylül Üniversitesi

Öz

Bu araştırma, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının özel dörtgenler ve aralarındaki ilişkilere dair algılarını belirlemek ve “yaygın bilişsel yolu” ortaya koymayı amaçlamıştır. Bu amaçla araştırma nitel araştırma yaklaşımı ile doküman incelemesi yöntemi kullanılarak tasarlanmıştır. Araştırmanın katılımcılarını bir eğitim fakültesinde ilköğretim matematik öğretmenliği 4. sınıfta okuyan 68 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Veriler katılımcıların hazırladıkları ders planlarından elde edilmiştir. Analizler neticesinde, matematik öğretmen adaylarında dörtgenlerin aile ilişkilerini oluştururken bazı yanlışlara düştükleri tespit edilmiştir. Ayrıca aile ilişkilerinde sırasıyla paralelkenar/eşkenar dörtgen; kare/dikdörtgen; paralelkenar/dikdörtgen; kare/eşkenar dörtgen ilişkilendirme yolu, “yaygın bilişsel yol” olarak tercih edildiği ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dörtgenlerde aile ilişkileri, yaygın bilişsel yol, matematik öğretmen adayları

Giriş

Geometrik kavramların öğretilmesi ile ilgili yapılan çalışmalarda bireylerin öğrenmede gösterdikleri davranışları anlamlandırmada van Hiele'nin ortaya attığı geometrik düşünme düzeyleri oldukça önemli rol oynamıştır. Çoğunlukla geometrik şekiller ve aile ilişkilerinin yapılandırılması ile ilgili yapılan araştırmalarda bireylerin öğrenme süreçlerinin van Hiele'nin düzeyleri ile uyumluluk gösterdiği ancak daha karmaşık durumların olduğu belirlenmiştir. Bu karışık durumu Fujita (2012) bir çalışmada öğrencilerin konuya dair oluşturdukları “yaygın (genel) bilişsel yolu” belirlemek sureti ile aşılabilirliğini iddia etmiştir. Vinner ve Hershkowitz'e (1980) göre bir grup, birey bir konuyu ve bunu oluşturan parçaları belli sıra ile anlar ve kavrar ise, bu anlama sırasına yoluna “yaygın bilişsel yol” denir. Vinner ve Hershkowitz'e (1980) göre bazı kavramlarda öğrenme yönü ve dolayısıyla hata yönü öğrencilerde aynı olabilmektedir. Yaygın bilişsel yolun belirlenmesi öğrencilerin gelişimsel yolları birçok matematiksel kavramların öğretilmesinde ve programın şekillenmesinde, ders planlarının düzenlenmesinde yol gösterici olabilir.

Bu araştırma matematik öğretmen adaylarının dörtgenler ve aralarındaki ilişkilere dair algılarını belirlemek ve yaygın olan düşünme biçimini “yaygın bilişsel yolu” ortaya koymayı amaçlamıştır.

Belli sayıda araştırmacı bazı geometrik şekiller üzerinde yaptıkları çalışmalarda bireylerin kavramsal anlamada yaygın bilişsel bir yapıyı ortaya çıkarmışlardır. Vinner ve Hershkowitz (1980) dar, geniş ve dik açılı üçgenlerde yaptığı araştırmada bireylerin üçgenlere ait yüksekliklerin daima üçgenin içinde kaldığı algısının yaygın olduğunu ve üçgenlerde yüksekliği tanımaya dair yaygın bilişsel yolun, üçgenin içine düşen yüksekliğin kavranmasından dışına çizilen yüksekliği tanımaya doğru olduğunu ortaya koymuştur. Nakahara (1995) Japon öğrenciler üzerinde yaptığı araştırmasında bazı dörtgenler için yaygın bilişsel yolun sırasıyla paralelkenar, eşkenar dörtgen, yamuk yönünde olduğu sonucuna ulaşmıştır. Okazaki ve Fujita (2007) Japon ve İngiliz öğrencilerin dörtgenlere ilişkin algılarını ortaya çıkarmak amacı ile yürüttükleri çalışmada her iki ülke öğrencilerinin farklı yaygın bilişsel yolu olduğunu ortaya koymuşlardır. Okazaki ve Fujita çalışmasında Japon öğrencilerin

¹ Doç. Dr., Elif Türnüklü, D.E.Ü. Buca Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İzmir, elif.turnuklu@deu.edu.tr

sırasıyla ilk önce paralelkenar/eşkenar dörtgen, kare/eşkenar dörtgen, dikdörtgen/paralelkenar, kare/dikdörtgen ilişkilerini anlarken; İngiliz öğrenciler farklı olarak anlamada paralelkenar/eşkenar dörtgen, dikdörtgen/paralelkenar, kare/dikdörtgen, kare/eşkenar dörtgen ilişki yolunu izlediklerini belirlemiştir. Bu tarz yaygın bilişsel yolun ortaya çıkması bireylerin dörtgenlere ilişkin algılarının nasıl olduğu ve aile ilişkilerini nasıl yapılandırdıklarıyla ilgili olmuştur.

De Villiers'a (1994) göre öğrenciler geometrik şekilleri sınıflarken, aile ilişkilerini yapılandırırken hiyerarşik sınıflamadan ziyade, parçalı sınıflamayı tercih ettiklerini ortaya koymuştur. De Villiers'ın (1994) tarifine göre parçalı sınıflama yapan bireyler şekillerin aile ilişkilerini dikkate almaz iken, hiyerarşik sınıflamayı kullanan bireyler ise, şekiller arası ilişkileri görerek aynı aileden olanlarına göre sınıflandırabilirler. Parçalı sınıflama, bireylerin geometrik şekillerin aile ilişkilerini tam anlamıyla kavramalarına engel ve dolayısıyla geometrik şekilleri öğrenmede sorun oluşturabilmektedir. Dörtgenlere ilişkin algılara yönelik yapılan araştırmalarda bireylerin dörtgenleri nasıl tanımladıkları, aile ilişkilerinin nasıl yapılandırdıkları, imgelerin nasıl yapılandığı önemli olmuştur. Bu tür araştırmaların değişik yaş gruplarında yapıldığı görülmüştür. Küçük yaş gruplarında (ilkokul düzeyinde) bireyler verilen şekli tanımada, adlandırmada, tanımlamada, özelliklerini saymada sorun yaşadıkları görülmüştür. Örneğin, elmas biçiminde duran bir kareyi yan yatığı için kare olmadığını iddia eden bireylere rastlanırken, daha büyük yaş grupları ile yapılan çalışmalarda şekilleri tanımada isimlendirmede sorun olmazken, onları tanımlamada ve aile ilişkilerini oluşturmada sorun yaşadıkları görülmüştür (Fujita, 2012; Fujita ve Jones, 2006; 2007; Okazaki ve Fujita, 2007). Bu sorunlar paralelkenar ailesini oluşturmada çoğunlukla rastlanmıştır. Yapılan çalışmalarda bireylerin paralelkenarı doğru tanımlayabildikleri, gördüklerinde tanıyabildikleri görülmüştür. Ancak kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgeni bu aileden kabul etme oranı çok yüksek bulunmamıştır. Benzer durum kare ve dikdörtgen arasındaki ilişki için de rastlanmıştır. Erez ve Yerushalmy (2006) bir bilgisayar programı ile yaptıkları bir araştırmada çocukların dörtgenlerin ilişkilerini yapılandıramadıklarından dolayı, programı kullanırken kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgen tuşlarının neden paralelkenar tuşundan yapacaklarını bir türlü anlayamadıklarını belirlemiştir. Ayrıca aynı çalışmada bireylerin kare ve dikdörtgen arasındaki ilişkilerde sorun yaşadıklarını "kareyi ikiye bölerim dikdörtgen elde ederim" tarzı ifadelerde ortaya koymuşlardır. Benzer şekilde Heinze ve Ossietzky (2002) yaptıkları çalışmada bireylerin yarım fazlasının kareyi tüm açılarının 90° olan bir dörtgen olarak gördüğünü ve tüm kenarları eşit olan dörtgenin sadece kare olabileceği (katılımcıların üçte biri) algısında bireylere rastlamışlardır. Bazı araştırmalarda elde edilen bulgulara göre bireylerin adı verilen şekilleri doğru olarak çizerken, doğru tanımları yapamadıkları görülmüştür. Örneğin kare ve dikdörtgeni doğru olarak çizen bireylerin tanımlarda kare için sadece "dört kenarı eşit uzunlukta dörtgen", dikdörtgen için "iki kısa iki uzun kenarı olan dörtgen" gibi eksik veya yanlış tanımlar yapıldığı tespit edilmiştir. Paralelkenar tanımında pek yanlış yapılmadığı nedeninin adında paralel kelimesinin geçmesinden bireylerde bir çağrışım yarattığı öne sürülmüştür (Fujita ve Jones, 2007). Yapılan araştırmalarda bireylerin paralelkenar ve eşkenar dörtgen ilişkisini kurmada pek zorlanmadıklarını bunun sebebinin de görünüş olarak birbirlerine benzemesi olarak gösterilmiştir (Fujita ve Jones, 2007).

Dörtgen algılarına dair yapılan bu çalışmalardan sınırlı sayıda öğretmenler ve öğretmen adaylarıyla yapıldığı görülmektedir. Öğretmen ve öğretmen adayları ile yapılan çalışmalarda da daha küçük yaş gruplarında yapılan çalışmalarda olduğu gibi benzer bulgulara ulaşıldığı görülmüştür (Okazaki ve Fujita, 2007; Türnüklü, Alaylı, Akkaş, 2013). Bu araştırmalarda bireylerin kendi kavram imgeleri çerçevesinde dörtgenleri tanımladıkları formal tanımlardan çoğunlukla saptıkları, kafalarında oluşan şekillere dair imgeler doğrultusunda dörtgenleri sınıflama yoluna gittikleri ve dolayısıyla bazı hatalara düştükleri ortaya çıkmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adayları ile yapılan bir araştırmada, bireylerin dörtgenleri doğru şekilde tanımlayanların sayısının yüksek olmadığı (yaklaşık %30) ortaya çıkmıştır (Türnüklü, Alaylı, Akkaş, 2013). Ayrıca eşkenar dörtgen ve kareyi farklı ailede görme, paralelkenarın tipik çizimi yüzünden dikdörtgen ve karenin paralellik özelliğinin ön plana çıkması, kareyi dikdörtgenden farklı bir ailede düşünme gibi bulgulara da

ulaşmıştır. Matematik öğretmenleri ile yapılan bir başka çalışmada da benzer bulgulara ulaşılmıştır (Türnüklü, Akkaş, Alaylı, 2013).

Teorik Çatı

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgenler ve bunları ilişkilendirmedeki yaygın bilişsel yolun belirlenmesi için temelde Tall ve Vinner'ın (1981) dikkat çektiği "kavram imgesi", Fischbein'in (1993) ortaya attığı geometrik şekillere ait "figür kavramı" ve bu kavram içinde öne çıkan "prototip şekil" (Hershkowitz, 1990) anlayışı teorik çatı olarak öne çıkmaktadır.

Tall ve Vinner (1981)'a göre "kavram imgesi" ve "kavram tanımı" birbirinden farklı ancak kişilerin kavramı oluşturmada öne çıkan durumlardır. Buna göre kavram tanımı bu kavramı anlatmak için kullanılan ifadelerin bütünüdür. Kavram imgesi de kavram ile ilgili tüm bir bilişsel yapıyı içerir. Bunlar kavrama ait zihinsel imge, içerdiği özellikler ve süreçlerdir. Araştırmacılara göre bireylerin kavramlara ilişkin imgeleri yıllar içinde ve değişik bağlamlar çerçevesinde yapılanmakta ve değişiklik göstermektedir.

Geometrik kavramlarda ise doğal olarak kavram ve kavram imgesi birlikte şekillenen iki unsurdur. Fischbein'e (1993) göre geometrik kavramlar hem bazı özellikler ile tanımlanabilir hem de görsel, figür olarak da bir imgeye sahiptirler. Örneğin kare, hem özellikleri ile (kenarlarının eşliği açılarının 90° olması gibi) hem de şekilsel olarak bireylerin kavram imgesi oluşturmada etkilidir. Bu bağlamda, geometrik şekillerin çok sık kullanılan ve sık rastlanan şekilsel görünüşleri bir başka deyişle prototiplerinden bireylerin kavram imgelerini oluşturmada etkilendikleri görülmüştür (Hershkowitz, 1990). Yapılan araştırmalar neticesinde bireylerin geometrik kavramları tanımlamaları bireylerin zihinlerinde oluşturdukları kavram imgesi ile şekillendikleri ve formal kavram tanımlarından farklılık gösterebileceği ortaya çıkmıştır (Tall ve Vinner, 1981; Monaghan, 2000; Heinze ve Ossietzky, 2002; Vighi, 2003). Ayrıca bu şekilde yapılan kavram tanımları prototip imgeler geometrik şekilleri sınıflama ve aile ilişkilerini yapılandırmada rol oynamaktadır. Geometrik şekillere dair bireylerin belli bazı tipik karar verme yollarını tercih ettikleri ve bu karar verme yollarının kişileri belli yanılırlara sürüklediği görülmektedir. Bunlar "prototip karar verme" olarak aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

Tip1: Prototip örneklere dayanarak yapılan görsel çıkarımların diğer durumlara (uymayan durumlara) genelleştirilmesi. Öğrencilerin üçgenin yüksekliğini üçgenin içinde düşünüp, uymayan durumda da içine çizip yükseklik kabul etmesi bu tipe örnek verilebilir.

Tip 2: Prototip şekillerin tipik özelliklerini çıkarımda bulunmada, karar vermede kullanıp prototipin özelliklerini kavramın diğer tipleri için de uygulamaları. Örneğin, "kare dışındaki tüm şekilleri dörtgen olmadığını iddia etme, çünkü kenarları eş uzunlukta olabilir ancak açılar eş olmuyor" yargısında bulunma (Hershkowitz, 1990).

Bu geneleme yollarının yanı sıra bir başka tür geneleme de tanımlanmıştır. Bu tür genelleme "analitik karar verme" olarak adlandırılmıştır. Bu tür genellemede bireyler kavramın içerdiği kritik özelliklere dayanan genellemelerde bulunabilmektedirler. Bu tür karar verme yolunda genelde bireyler doğru hükümler verebilmektedir. Örneğin, tüm çokgenler kapalı bir şekil olduğu için açık olarak verilen şekli bu bilgiye dayanarak çokgen olmadığına karar verme (Hershkowitz, 1990). Yukarıda açıklanan bu tür karar verme, geneleme yapma türleri bireyleri geometrik kavramlarda bazı yanılırlara sevkettiği çeşitli araştırmalar tarafından ortaya konulmuştur. Özellikle geometrik şekillerin aile ilişkilerinin belirlenmesinde bireylerin tipik hatalara düştükleri yanlış genellemelere ulaştıkları görülmüştür. Fujita ve Jones (2007) dörtgenleri tanımlama ve sınıflamaya ilişkin yaptıkları çalışma ile karşılaşılan genel hatalar ve bireylerin dörtgenlere dair oluşturdukları imgeleri temel aldıklarında bireylerin dörtgenler ve aile ilişkilerini yapılandırmaları ve bu konudaki gelişimlerinin bir teorik yapıda olabileceklerini iddia etmişlerdir. Fujita (2012) dörtgenlerin algılanması ve aile ilişkilerinin yapılandırılmasına ilişkin yaştan bağımsız olarak bazı gelişimsel düzeyler belirlemiştir. Bu düzeyleri paralelkenar ailesi çerçevesinde aşağıdaki gibi sınıflamıştır (Fujita 2012: 64):

Hiyerarşik: Bireylerin kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgeni paralelkenar olarak kabul etmesi, tanım ve özelliklerin barındırdığı ters yönde aile ilişkisinin anlaşılması (örneğin, dikdörtgen paralelkenar ailesindedir, ancak her paralelkenar dikdörtgen olamaz).

Kısmi prototip: Bireylerin prototip şekil kavramını genişletmeye başlaması. Eşkenar dörtgeni, dikdörtgeni, kareyi paralelkenar olarak kabul etme ancak birbirleri arasındaki ilişkiyi görememe kabul edememe, yukarıda tanımlanan Tip2'deki karar verme süreci kullanılıyor.

Prototip: Bireyin kişisel sınırlı kavram algısına sahip olması. Karar vermede birey Tip 1 veya 2'deki karar verme ile yanılı durumda olabilir.

0 düzey: Hiçbir bilgisinin olmaması.

Fujita'nın yukarıda verilen paralelkenar için oluşturduğu düzeylerin van Hiele düzeyleri ile uyumlu olduğu da görülmektedir. Geometrik şekillerin bir bütün olarak algılama, görünüşleri itibariyle şekilleri isimlendirme gibi davranışların gözlemlendiği van Hiele düzeylerinden "görsel düzey" Fujita'nın "prototip" olarak ifade edilen düzey ile bir ölçüde örtüşmektedir. Ayrıca van Hiele düzeylerinden "analitik düzey" "kısmi prototip" düzey ile; "informal tündengelim düzey" Fujita'nın "hiyerarşik düzey" ile benzerlik göstermektedir.

Hershkowitz (1990) geometrik kavramlarda yanılıları ortadan kaldırmak için analitik karar vermenin desteklenmesi gerektiğini iddia etmiştir. Bu yüzden analitik karar vermede etkili olan kavramların sahip olduğu kritik özelliklerin öğrenmede kullanılması gereği üzerine durmuştur. Bu kritik özellikler çoğunlukla kavramların formal tanımlarında (akademik olarak kabul görmüş tanımlar) yer almaktadır. Ancak hem bu kritik özellikler ve dolayısıyla formal tanımlar hem de bu özellikleri içeren tipik şekil çizim ve örnekleri bireyleri kendi kavram imgesini oluşturmasında etkili olmuştur. Şekillerin prototip örnekleri, sahip oldukları özellikler, şekillerin ait oldukları ailenin barındırdığı özellikler, daha özel örneklerin sahip olduğu kritik olmayan ancak etkili görsel imgeye sahip geometrik şekiller bireyleri kendi kavram imgesini oluşturmaya ve dolayısıyla tüm bunların etkisi ile yanılı yapmaya itebilmektedir (Fujita, 2012; Fujita ve Jones, 2007; Okazaki ve Fujita, 2007).

Yöntem

Bu araştırma ilköğretim matematik öğretmen adaylarının özel dörtgenler (kare, dikdörtgen, paralelkenar ve eşkenar dörtgen) ve aralarındaki aile ilişkilerine dair algılarını ve yaygın bilişsel yolu ortaya koymayı amaçlamaktadır. Bu amaçla araştırma nitel araştırma yöntemi temelinde doküman incelemesi yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Doküman incelemesi türündeki bir araştırma çalışması düşünülen olgular hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizini kapsar (Yıdırım ve Şimşek, 2008). Araştırmanın verilerini oluşturan dokümanlar adayların hazırladığı ders planlarıdır.

Matematik öğretmen adaylarının dörtgenlerin özelliklerini kavratma ve aile ilişkilerini anlatmaya yönelik hazırladıkları ders planlarına yansıttıkları yapılar onların dörtgen algılarına ve aile ilişkilerini yapılandırmalarına ilişkin genel bilişsel yapılarını ortaya koyacaktır. Bu düşünce ile toplanan ders planlarında dörtgenleri işleyiş sıra ve yönü, işlenişlerdeki ilişkilerin nasıl yapılandırıldığı, bu ilişkilerde dörtgenlerin hangi kritik özellikleri ön plana çıktığı ve açığa çıkan yanılıların neler olduğu sorularına yanıt aranmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırmanın katılımcıları bir devlet üniversitesindeki eğitim fakültesinde ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan 4. sınıf öğrencilerinden 68 kişiden oluşmaktadır. Katılımcılar nitel araştırmalar için kullanılan örnekleme yöntemlerinden amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilmiştir.

Analiz

Toplanan dokümanların (ders planları) analizi içerik analizi çerçevesinde analiz edilmiştir. Bunun için ilk önce tüm veriler okunmuş açığa çıkan temalar belirlenmiş ve her metin bu temalar çerçevesinde kodlanmıştır. Sonra her bireyin planında ortaya çıkan aynı kodlar kendi içinde ve farklı bireylerde kodlanan aynı kodlar ile karşılaştırılarak benzerlik ve farklılıklar ortaya konulmuştur. Böylelikle genel bir yapı oluşturulmak istenmiştir. Bu temalar, dörtgenlerin hangi özelliklerinin

kullanıldığı, dörtgenleri ilişkilendirmeleri, ilişkilendirme biçimleri, ilişkilerin doğru yapılandırılıp yapılandırılmaması ve yanılığlar olarak tespit edilmiştir. Ayrıca dörtgenlerin ilişkilendirilemelerinin sayılması ile frekansları ve doğruluk yüzdeleri de hesaplanarak nicel veri analizlerine de başvurulmuştur.

Bulgular

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kare, dikdörtgen, paralelkenar ve eşkenar dörtgeni birbirleri ile ilişkilerini ortaya koyarak işleyiş biçimleri çeşitlilik göstermektedir. Temelde katılımcılar ilkönce kendilerince bu dörtgenlerden biri ile başlayıp diğerleri ile ilişkileri bunun üzerine inşa etmişlerdir. Bu tarz ikili ilişkilendirmelerde belirledikleri bir dörtgen üzerine ilişkili olduğunu düşündükleri bir başka dörtgeni inşa ettikleri veya tamamen bağımsız tanımlayarak sonra ilişkilendirdikleri görülmüştür. Katılımcıların dörtgenleri anlatırken tanımlama yaptıkları veya özelliklerini sıraladıkları görülmüştür. Bulgularda öğretmen adaylarının hangi özellikleri ön plana çıkardıkları ele alınmıştır. Daha sonra veriler katılımcıların hangi çokgen çiftlerini ne tür özellikler ile ilişkilendirdiklerine göre değerlendirilmiş ve bir bilişsel yapı çizilmek istenmiştir. Bulgularda katılımcıların yazdıkları bazı ifadeler birer kanıt olarak okuyucuya sunulmuştur. Bu alıntılarda katılımcıların isimleri sayılarla kodlanmıştır ve öğretmen adayı oldukları için Ö.A.12 gibi bir kısaltma ile yer verilmiştir.

Katılımcıların dörtgenleri tanımlarken veya özelliklerini sayarken öne çıkardıkları, kritik özellikler olarak nitelendirebileceğimiz özellikler Tablo 1’de verilmiştir. Bu tablo katılımcıların planlarında örneğin “karenin kenarlarının eşit olduğunu, açılarının 90 derece olduğunu söylerim (Ö.A.23)” veya “paralelkenarın karşılıklı kenarları paralel olan bir dörtgen olduğunu söylerim (Ö.A.2)” ifadelerinde olduğu gibi dörtgenleri tanımlarken veya tarif ederken kullanılan özelliklerin neler olduğu belirlenerek oluşturulmuştur.

Tablo 1.

Dörtgenlerin Kullanılan Kritik Özellikleri

KARE	DİKDÖRTGEN	PARALELKENAR	EŞKENAR DÖRTGEN
Kenarların eşliği	Karşılıklı kenarların eşliği	Karşılıklı kenarların paralel olması	Karşılıklı kenarların paralel olması
Açıların 90 derece olması	Açıların 90 derece olması	Karşılıklı açılar eş olması	Karşılıklı açılar eş olması

Tablo 1’den de anlaşılacağı üzere belirlenen bu kritik özellikler genelde birçok ders kitabında tanımlarda yer alan veya bu dörtgenlerin akademik olarak tanımlanmasında kullanılması ön görülen özelliklerdir. Bu özellikler arasında eşkenar dörtgen için kenarların eşliği genelde formal tanımlarda yer almasına rağmen çok fazla ön plana çıkmamıştır. Bu dörtgenin isminde yer alan “eş kenar” ifadesi bu özelliği ifade etme gereğini oluşturmamış olabilir.

Tanımlarda yer alan özellikler Hershkowitz’e (1990) göre bireylerin karar vermelerinde temel oluşturabilmektedir. Hershkowitz’e göre bu özellikler kritik özellikler olarak isimlendirilir. Kritik olmayan özellikler ise çoğunlukla şekillerin prototip çizimlerinden kişilerin belirledikleri özellikler olabilmekte veya ikincil sırada önemli olabilmektedir. Örneğin, kare ve dikdörtgenin kenarlarının paralel olması, dörtgenlerin köşegen özellikleri, iç açı ölçülerinin toplamının 360 derece olması, ardışık açılar toplamının 180 derece olması gibi. Bu çalışmada katılımcılardan bazılarının dikdörtgen için “iki kısa, iki uzun kenarı olan dörtgen” özelliğini kullandıkları görülmüştür. Paralelkenar ve eşkenar dörtgen için “açılar dik olamaz” genellemesi yapılırken, kare ve dikdörtgen için paralellik özelliği çoğunlukla akla gelmemiştir. Kritik olmayan özelliklerin kişilerin sahip oldukları kavram imgesi ile şekillendiği görülmekte ve bu yüzden dörtgenler arası ilişkilerin yapılandırılmasında bazı yanılığlara yol açtığı tespit edilmiştir. Bu yanılığların neler olduğu dörtgenleri nasıl ilişkilendirdikleri ile ilgili veriler ile birlikte sunulacaktır.

İlişkilendirmeler açısından veriler incelendiğinde 68 öğretmen adayının belirtilen dörtgenleri birbirleri ile ilişkilendirmelerine ilişkin frekans değerleri Tablo 2’de verilmiştir. Tabloda sütunda verilen dörtgenden yola çıkarak diğer satırda verilen dörtgeni inşa edenlerin frekansları yer almaktadır. Öğretmen adaylarının yazdıkları planlarda, bazı adayların dörtgenleri tamamen bağımsız olarak ele aldıkları, tanımladıkları ve dörtgenler arasındaki ilişkileri kurmadığı veya hangi özellikler açısından ilişkili olduğu belirtmediğinden tablo dışında tutulmuştur. Bu yüzden 68 kişinin planı değerlendirmeye alınmasına rağmen frekans değer toplamları katılımcı sayısından düşük kalmıştır.

Tablo 2.

Dörtgenlerin Birbirleri İle İlişkilendirme Frekans Değerleri

	Paralelkenar	Dikdörtgen	Kare	Eşkenar Dörtgen	TOPLAM
Paralelkenar	----	19	0	14	33
Dikdörtgen	13	----	21	0	33
Kare	1	15	----	15	31
Eşkenar Dörtgen	1	0	6	----	7
TOPLAM	15	34	27	29	----

Tablo 2’deki frekans değerlerinden paralelkenarın çoğunlukla dikdörtgen (13 kişi) ile ilişkilendirilerek tanımlandığı, inşa edildiği görülmektedir. Kare (1 kişi) ve eşkenar dörtgenden (1 kişi) yola çıkarak inşası çok yaygın değildir. Dikdörtgen üzerine tanımlanan veya dikdörtgendeki bir özelliği ile yapılandırılan paralelkenarda açılı özelliği ön plana çıkmıştır. Paralelkenarın açılı özelliğini dikdörtgen ile kıyaslayarak anlatan katılımcıların bazılarında aşağıdaki ifade de olduğu gibi yanlışlara düştükleri görülmüştür.

“Paralelkenarda dikdörtgenin sadece belli bir açı ile yan yatmış şekli olduğunu görmelerini isterim (Ö.A.32).”

Bu katılımcının paralelkenara dair prototip diye tabir edilen ve genelde şekil tanımlarken kullanılan tipik çizime dair imgenin etkili olduğu görülmektedir. Ancak bu prototip imge etkisi ile birey bir yanlışlığa düşmüştür. Bu ifade paralelkenarların açılarının hiçbir zaman 90 derece olamayacağı genellemesine götürür. Bu da Hershkowitz’in (1990) tanımladığı 2.Tip genelleme hatasına işaret etmektedir. Benzer durum aşağıdaki farklı katılımcıların ifadelerinde de görülmektedir,

“Dikdörtgeni verdikten sonra paralelkenar çizer ikisini karşılaştırırım. Yani paralelkenarın açılarının dik olmadığını yalnızca karşılıklı açılarının eşit olduğunu gösteririm (Ö.A.45).”

“Paralelkenarın dikdörtgenden farklı olarak karşılıklı kenarlarının eşit olmasına rağmen tüm iç açılarının eşit olmadığını söylerim (Ö.A.49).”

Genelde dikdörtgenden yola çıkarak paralelkenarı yapılandırmalarda yanlışlığa düştükleri görülmüştür. Ancak iki katılımcıda farklı bir ilişkilendirme görülmüştür. Bunlar açılı özelliğine dikkati çekmiş ancak “farklı olarak açılı sabit değildir” ifadesinde olduğu gibi paralelkenarın dikdörtgen ile ilişkisine farklı bir bakış açısı getirmişlerdir. Bu tarz bir ilişki yukarıda ortaya çıkan yanlışlığı ortadan kaldırmaktadır.

Eşkenar dörtgenden yola çıkarak paralelkenarı anlatan bir katılımcının kenarların eşit olmasına dayandırarak ilişkilendirme yaptığı görülmüştür. Bu öğretmen adayı “eşkenar dörtgenin bütün kenarları eş olduğu halde paralelkenarın böyle olmadığını vurgularım (Ö.A.61)” ifadesi ile iki dörtgen arasındaki ilişkide bir yanlışlığa yol açmıştır. Bu ifade de görüleceği üzere, eşkenar dörtgen ve paralelkenara ait prototip imge hatalı bir ilişkilendirmeye yol açmıştır. Bu bilişsel bakış açısı ile bir paralelkenarın tüm kenarları eş olamaz ve dolayısıyla eşkenar dörtgen aynı zamanda paralelkenar ailesinde yer alamaz.

Tablo 2’deki frekans değerlerinden dikdörtgenin çoğunlukla paralelkenar (19 kişi) ve kare (15 kişi) ile ilişkilendirilerek inşa edildiği görülmektedir. Paralelkenardan hareketle dikdörtgeni

yapılandıran katılımcılar genellikle açı özelliğini ön plana çıkarmışlardır. Katılımcıların “paralelkenarın açılarını 90 derece yapınca dikdörtgen olur (Ö.A.12)”, “paralelkenarın açılarının 90 derece olmuş hali dikdörtgendir(Ö.A.28)” şeklindeki ifadeleri buna örnektir. Bu yaklaşımda dikdörtgen paralelkenarın açılar açısından özel hali olarak yerini bulmuştur. Ancak bazı ifadelerde “dikdörtgenin farklı yanının açısının 90 derece olması (Ö.A.14)” veya “dikdörtgen ile paralelkenarın açılarını karşılaştırdım aynı olmadıklarını görürler (Ö.A.20)” tarzı *farklı* olan özellik olarak 90 derece ön plana çıkarılınca yanlış ortaya çıkmıştır.

Kareden yola çıkarak dikdörtgeni tanımlamada, katılımcıların çoğunlukla kenar özelliğine dayandırarak inşa ettikleri tespit edilmiştir. Dikdörtgenin kenarlarının eşit uzunlukta olmadığı ya da karşılıklı kenarların eş ama farklı uzunlukta olduğunda dikdörtgen olduğu ifade edilmiştir. Aşağıda özellikle yanlışya düşülen bazı ifadeler yer verilmiştir:

“Karenin özelliklerini verdikten sonra iki kenarını eşit ölçüde uzattığımızda oluşan şekle dikdörtgen dediğimizi söylerim (Ö.A.62)”.

“Dikdörtgen kareden farklı olarak bütün kenarları birbirine eşit değil (Ö.A.6)”.

Kareden yola çıkarak dikdörtgeni yapılandıran ve ikisi arasında ilişkinin kurulması matematiksel olarak bir sorun çıkarmamaktadır. Ancak yukarıdaki ifadelerde olduğu gibi aile ilişkisini yapılandırmada sorun çıkaracaktır. Çünkü kare ile dikdörtgen böyle bir durumda aynı aile içinde düşünülemez. Özellikle ikinci katılımcının iki dörtgen arasındaki *farklı* olan özellik ile anlatmaya çalışmış olması yanlışya sürüklemiştir. Bu durumda bireyde “kare özel bir dikdörtgendir” analojisi oluşmayabilir.

Katılımcıların ifadelerine göre Tablo 2’deki verilerden görüleceği üzere, kare çoğunlukla dikdörtgen (21 kişi) hareketle inşa edilmiştir. İlişkilendirmenin kenar özelliği ile kurulduğu görülmektedir. Çoğunlukla bu yöndeki bir ilişkide yanlışya rastlanmamıştır.

“Dikdörtgenin kenarlarının eşit olmasından yola çıkarak kareyi anlatırım (Ö.A.60)”

“İlk önce dikdörtgen çizilir. Kenarlarının birbirine dik olduğu, karşılıklı kenarların birbirine eşit olduğu bulunur sonra bütün kenarları birbirine eşit olan dikdörtgen, yani özel bir dikdörtgen olan kare verilir(Ö.A.3)”

“Kare dikdörtgenin kenarlarının eşit halidir(Ö.A.5)”

“Dikdörtgenin kenarlarını eş yaptığımızda kareyi elde ederiz(Ö.A.12)”

Karenin inşa edildiği bir diğer dörtgen de eşkenar dörtgendir. Eşkenar dörtgene dayalı karenin inşası oldukça nadir olmasına rağmen (12 kişi), ilişki çoğunlukla açı özelliğine dayandırılarak kurulmuştur.

“Eşkenar dörtgenin açısı 90 derece olduğunda kare olduğunu fark ettiririm (Ö.A.44)”

“Eşkenar dörtgeni önce anlatırım sonra kareye geçer, karenin özel bir eşkenar dörtgen olduğunu söylerim (Ö.A.48)”.

Tablo 2’deki değerlere bakıldığında eşkenar dörtgenin inşasında paralelkenar ve kareden yararlanılmıştır. Paralelkenardan hareketle yapılandırılan eşkenar dörtgen ifadelerinde genellikle kenar ilişkisi ön plana çıkmıştır.

“Eşkenar dörtgen, paralelkenarın kenarları eş olan özel bir halidir(Ö.A.22)”

“Eşkenar dörtgen paralelkenarın kenarlarının eşit halidir (Ö.A.5)”

Ayrıca kareden yola çıkarak eşkenar dörtgeni ilişkilendirilen veya yapılandıran katılımcılar da olmuştur. Bunlar genelde açılara dikkat çekerek ilişki kurmuşlardır. Katılımcıların “kareyi kenarlarını bozmadan açılarını değiştirerek şekli çizdiririm sonra bunun eşkenar dörtgen olduğunu söylerim(Ö.A.11)” veya “eşkenar dörtgenin kareden farkı köşe açıları 90 derece olmak zorunda değildir(Ö.A.9)” şeklindeki ifadeleri bunlara örnektir. Bu yönde ilişki kuran kare ve eşkenar dörtgen arasındaki ilişkide açı özelliğini ön plana çıkaran bazı katılımcıların yanlışya düştükleri tespit edilmiştir. Aşağıda ifadeleri verilen iki katılımcı buna örnektir,

“Karenin açıları dik olmasa nasıl bir şekil olurdu diye sorardım (Ö.A.4)”

“Karenin açılarını değiştirdiğimizde eşkenar dörtgen elde edilir (Ö.A.24)”

Bu adayların ifadelerinden de anlaşılacağı üzere eşkenar dörtgene ait prototip imgenin kare ile ilişkilendirmede sorun yarattığı görülmektedir. Buradaki ifadelerde olduğu gibi eşkenar dörtgenin hiçbir zaman 90 derecelik bir açıya sahip olamayacakmış algısı oluşabilir.

Tablo 2’deki frekanslar dikkate alındığında ilişki yönü dikkate alınmaksızın en çok dikdörtgen ve kare ilişkilendirilmesinin (36 kişi) yapıldığı görülmektedir. Sonra sırası ile paralelkenar ile dikdörtgen (32 kişi), kare ile eşkenar dörtgen (21 kişi), paralelkenar ile eşkenar dörtgen (15 kişi) ilişkilendirmeleri gelmektedir. Bu ilişkilendirmelerin doğru, yanlış yapılandırılıp yapılandırılmadığına bakıldığında ise Tablo 3’de verilen yüzde değerleri elde edilir. Kare ve paralelkenar ilişkisine rastlanmadığı için tabloda yer verilmemiştir (Bu iki dörtgeni ilişkilendiren tek bir katılımcı olmuştur. Ancak bu kişi bu ilişkiyi çok açık yazmadığı için yer verilmemiştir).

Tablo 3.

Dörtgenlerin Yanılgısız İlişkilendirilme Yüzdeleri

Paralelkenar/Dikdörtgen	Paralelkenar/Eşkenar dörtgen	Kare/Eşkenar dörtgen	Kare/Dikdörtgen
%75	%93	%57	%86

Tüm katılımcıların hazırladıkları ders planları dikkate alındığında kare, dikdörtgen, paralelkenar ve eşkenar dörtgeni tüm aile ilişkileri ile işleyen yapılandırıcı bireye rastlanmamıştır. Çoğunlukla ikili ilişkilendirmeler yapılırken ele alınan dörtgen çiftlerinin diğer dörtgenler ile ilişkisi unutulmuştur. Bu da De Villiers (1994)’ın tanımladığı sınıflama ilişkileri açısından değerlendirilirse kısmi olarak bir hiyerarşik sınıflama yapılan anlatım biçimine rastlandığı ifade edilebilir. Az sayıdaki katılımcının hiç bir ilişki yapılandırmadan sadece belirtilen bu dörtgenlerin özelliklerini sayarak bir anlatım biçimi izledikleri de görülmüştür.

Tartışma ve Sonuç

Bulgular genel anlamıyla değerlendirildiğinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kare, dikdörtgen, paralelkenar ve eşkenar dörtgeni ve bunlar arasındaki ilişkileri yapılandırırken kritik olarak nitelendirilen özellikleri kullandıkları söylenebilir. Ayrıca, bazı dörtgen ilişkilendirilmelerinde kritik olmayan özelliklerin katılımcılar tarafından ilişkilendirmelerde kullanıldıkları her iki dörtgenin de bu özelliğe sahip olmasına karşın sanki biri için bu özelliği taşıymıyormuş gibi yorumlarda bulunmalarına sebep olmuştur. Kare ve dikdörtgenin paralellik özelliğinin hatırlanmaması ve bu dörtgenlerin aynı zamanda bir paralelkenar olduğunun unutulması bu duruma bir örnektir. Ancak kritik ve bazen de kritik olmayan özelliklerin kullanımında kavramsal imgelerin etkisi ile bazı yanılgılara yol açacak aile ilişkilerini yapılandırdıkları ortadadır. Örneğin, karenin açılarının dik olması kritik özellik olurken, eşkenar dörtgende böyle bir özelliğin kritik özellik olmaması, bireylerde “açıları dik olmayan kare eşkenar dörtgendir” bakış açısını geliştirmiştir.

Bu ve bunun gibi bulgularda sunulan yanılgıların makalenin teorik çatısında da belirtilen Hershkowitz (1990)’ın tanımladığı Tip1 ve Tip2 olarak adlandırılan genelleme hatalarından olduğu görülmektedir. Bunları aşağıdaki gibi özetlemek mümkün olabilir:

Kare-Dikdörtgen ilişkisi için: Dikdörtgen, kareden farklı olarak bütün kenar uzunlukları hiç bir zaman eşit olmaz.

Paralelkenar-Dikdörtgen ilişkisi için: Paralelkenar, dikdörtgenden farklı olarak açıları hiç bir zaman 90 derece olmaz.

Paralelkenar- Eşkenar dörtgen ilişkisi için: Paralelkenar, eşkenar dörtgenden farklı olarak bütün kenarları hiç bir zaman eşit olmaz.

Kare- Eşkenar dörtgen ilişkisi için: Eşkenar dörtgen, kareden farklı olarak açıları hiç bir zaman 90 derece olmaz.

Bu tarz yanlış genellemeler başka çalışmaların bulguları ile benzerlik göstermektedir (Berkün, 2011; De Villiers, 1994; Fujita, 2012; Türnüklü, Akkaş, Alaylı, 2013). Tüm bunlar dikkate alındığında katılımcılar, aile ilişkilerini yapılandırmada Fujita'nın belirlediği düzeylerden "kısmı prototip" ve belli ölçüde "prototip" düzeyine karşılık gelmektedir. Bu düzeyler katılımcıların kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgeni paralelkenar ailesinde bazen kabul edebilmekte ve yukarıda belirtilen kavram imgesi ve prototip şekil imgesi durumlarından kaynaklanan genelleme hatalarına düşebildiklerini ifade eder. Bu tespit van Hiele'nin düzeyleri ile ilişkilendirilecek olunursa, özel dörtgenlerde katılımcılar "görsel" ve büyük bir ağırlıkla "analitik" düzeyde oldukları söylenebilir.

İlişkilerde kare ile paralelkenar ilişkisinin hiç kurulmaması matematik öğretmenleri ile yapılan bir başka çalışma (Türnüklü, Akkaş, Alaylı, 2013) ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca adı geçen çalışmada eşkenar dörtgeni paralelkenarın; karenin eşkenar dörtgenin özel bir hali olduğunu kabul etmeme durumunun rastlanması ile de benzer sonuçlara ulaşılmıştır.

Tüm bu yanlışlar, ilişkilendirme biçimleri dikkate alındığında bazı araştırmacıların (Erez ve Yerushalmy, 2006; Heinze ve Ossietzky, 2002; Okazaki ve Fujita, 2007) da dikkat çektiği aile ilişkilerinde ters yöndeki ilişkileri yapılandırmada sorun olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle, örneğin paralelkenar dikdörtgeni kapsayan bir aile, her dikdörtgen bir paralelkenar özelliğini taşır. Ancak herhangi bir paralelkenar dikdörtgen özelliğini taşımayabilir. Ancak bu durumu kavrayamayanlar yani ters (karşıt) yönde aile ilişkisini doğru oluşturamayanlar "açıları dik olmayan dörtgenler paralelkenardır" ifadesinde olduğu gibi yanlışlığa yol açabilecek genellemelere varabilir. Nitekim bu tarz ifadeler bu araştırmanın bulgularında her dörtgen ilişkisi için ortaya çıkmıştır. Bu tür yanlış van Hiele düzeylerinden "analitik düzey" ile örtüşmektedir.

Tabii ki sadece yanlış ilişkilendirmeler yapılmamıştır. Bazı ilişkilendirmelerin ortaya çıkan yanlışların nasıl engellenebileceğine dair ipuçları da sağladığı düşünülmektedir. Örneğin, dikdörtgenden hareketle özel hali olan kareyi ilişkilendirmek daha anlamlı olmuştur. Bu bakış açısı, karenin dikdörtgenin özel hali olduğu ve kareyi dikdörtgen ailesi içinde kabul eden bir çıkarıma götürmekte ve çoğunlukla bireyler tarafından doğru şekilde ortaya konulmuştur. İkinci olarak, bazı katılımcıların eşkenar dörtgen ve paralelkenarın açılarının hiç bir zaman 90 derece olmayacak algısını yaratmayacak "farklı olarak açılar sabit değildir" şeklindeki ifadeler öğretimsel olarak bazı ipuçları sağlamaktadır.

Sonuç olarak tüm bu ilişkilendirmeler ve bunların ne ölçüde yanlışsız yapılandırdıkları dikkate alındığında Şekil 1'de verilen şemadaki yaygın bilişsel yolu çizmek mümkün olmuştur.



Şekil 1: Özel Dörtgenlerde Aile İlişkilerini Yapılandırmada "Yaygın Bilişsel Yol"

Bu yolda bireylerin basit anlamda çoğunlukla paralelkenar/eşkenar dörtgen ilişkilendirmesini yaptıklarını sonra kare/dikdörtgen, paralelkenar/dikdörtgen ve son olarak kare/eşkenar dörtgen ilişkilerini yapılandırdıkları söylenebilir. Araştırmada, Okazaki ve Fujita'nın (2007) oluşturduğu Japon öğrenciler ve İngiliz öğretmen adayları için verdiği yaygın bilişsel yol ile belli ölçüde benzerlik gösterdiği görülmektedir. Paralelkenar/eşkenar dörtgen, hem bu çalışmada hem de Okazaki ve Fujita'nın (2007) çalışmasında ilk sırada yer alan dörtgenler olmuştur. Bir çok araştırmacının da belirttiği gibi bu çalışmada da bu iki dörtgenin prototip şekillerinin çok benzemesi (Fujita, 2012; Okazaki ve Fujita, 2007) ve aynı zamanda kritik özellikleri ilişkilendirmeler açısından sorun yaratmadığı için ilişkileri en başarılı yapılandırılan dörtgenler olmuşlardır. Daha sonra sıralamada yer alan dörtgen çiftleri sırası Okazaki ve Fujita'nın çalışmasından farklılık göstermiştir. Bu araştırmacıların çalışmasında ikinci sırada yer alan paralelkenar/dikdörtgen ilişkisi bu araştırma

verilerine göre üçüncü sırada yer almıştır. Bu araştırmada katılımcıların çoğunlukla açılara odaklanarak paralelkenarın dikdörtgenden farklı yanının açılarının 90 derece olmaması şeklinde tanımlamaları onları yanılığa itmiştir. Burada yaygın bir bilişsel engel olduğu söylenebilir. Fujita (2012), Okazaki ve Fujita (2007) da çalışmalarında benzer bir yanılığa işaret etmiştir. Paralelkenar/eşkenar dörtgenin ilişkisinde yapılandırılan paralellik ilişkisi, paralelkenar/dikdörtgen ilişkisi için bir analogi olarak kullanılabilir. Bu araştırmada yaygın bilişsel yol açısından ortaya çıkan farklılıklar kültürel farklılıklardan da kaynaklanmış olabilir.

Özel dörtgenlerde aile ilişkilerini yapılandırmada yaygın bilişsel yolun belirlenmesi, katılımcıların ilişkileri nasıl ve ne ölçüde doğru yapılandırdıklarını ortaya koymada faydalı olmuştur. Belirlenen bu yol ile bu konuların öğretiminde dörtgenler arası ilişkiler yapılandırılarak olası kavram yanılıklarını engellemek ve doğru kavram imgelerini oluşturmak mümkün olabilir. Ayrıca öğretmen adaylarına bu konuları işlerken karşılaşılabilecek yanılıklı kavram imgelerinin nedenlerini öngörme olanağı da verebilir. Elde edilen bu veriler ve bu araştırma ile sınırlı kalmadan, gerek matematik öğretmen adayları gerekse farklı yaş grupları ile araştırmalar yapılarak “yaygın bilişsel yol”un belirlenmesi çokgenler ve aile ilişkilerini yapılandırmada ve dolayısıyla problem durumlarında ortaya çıkan sorunları gidermede önemli olacaktır. Bu araştırma bu bağlamda verilerin elde edilme yolu ve belli sayıda kişi ile çalışılmış olması itibarıyla sınırlı kalmıştır. Ancak araştırma bulgularının öğretimsel açıdan, hem öğretmen adaylarının eğitimlerine yön verilmesi hem de matematik öğretimi açısından bazı ipuçları oluşturduğu düşünülmektedir.

Kaynakça

- Berkün, M. (2011). *İlköğretim 5 ve 7. sınıf öğrencilerinin çokgenler üzerindeki imgeleri ve sınıflandırma stratejileri*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For The Learning of Mathematics*, 14, 11-18.
- Erez, M. M., & Yerushalmy, M. (2006). "If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle ..." young students experience. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 271-299.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 139-162.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 60-72.
- Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in scotland. In J. Novotana, H. Moraova, K. Magdalena & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of The 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 14-21.
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9 (1&2), 3-20.
- Heinze, A., & Ossietzky, C. (2002). "...Because a square is not a rectangle" students' knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of The 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 81-88.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42 (2), 179-196.
- Nakahara, T. (1995). Children's construction process of the concepts of basic quadrilaterals in Japan. In A. Oliver & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 27-34.
- Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in japan and scotland. In H. Woo, K. Park & D. Seo (Eds.), *Proceedings of The 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 41-48.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-16.
- Türnüklü, E., Alaylı, F.G., ve Akkaş, E.N. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgenlere ilişkin algıları ve imgelerinin incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 13 (2), 1213-1232. .
- Türnüklü, E., Akkaş, E.N., ve Alaylı, F.G. (2013). Mathematics teachers' perceptions of quadrilaterals and understanding the inclusion relations. In B. Ubuz, Ç. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* Antalya, Türkiye, 6-10 February: 705-714.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of The 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 177-184.
- Vighi, P. (2003). The triangle as a mathematical object. *European Research in Mathematics Education III Congress Proceedings, Bellaria, Italy, 28 February-3 March*, 1-10.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (7. bs). Ankara: Seçkin Yayıncılık.